Proposition :

Soit $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ un polynôme du second degré $(a\neq 0)$, l'étude du signe du polynôme dépend de la valeur de son discriminant :

- $\Delta<0$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$	Signe de a

- $\Delta=0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2{\cdot}a}$	$+\infty$
$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$	Signe de a	0	Signe de a

- $\Delta>0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$	Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a

où x_1 et x_2 sont les deux racines du polynôme.

Preuve :

On considère un polynôme du second degré écrit sous la forme : $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ où $a\neq 0$

- $\Delta<0$: le polynôme admet la forme canonique :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a{\cdot}\left[\left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2-\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}\right] \quad (*)$$

On a les comparaisons :

$$\Delta<0 \implies -\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}>0 \implies \left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2-\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}>0$$

Ainsi, le signe de $(*)$ ne dépend que du signe de a.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$	Signe de a

- $\Delta=0$: on a : $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a{\cdot}\left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2$

On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2{\cdot}a}$	$+\infty$
$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$	Signe de a	0	Signe de a

- $\Delta>0$: en notant x_1 et x_2 les deux racines du polynômes, on a la factorisation :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a{\cdot}(x-x_1){\cdot}(x-x_2)$$

On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	Signe de a		Signe de a		Signe de a
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$	Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a