Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Preuve :

Pour tout entier naturel ℓ, le terme de rang k admet pour expression :

$u_\ell=u_0+\ell\cdot r$

Ainsi, pour tout entier naturel k, on a :

$$\begin{aligned}u_k+u_{n-k}&=(u_0+k\cdot r)+\big[u_0+(n-k)\cdot r\big]\\&=u_0+k\cdot r+u_0+(n-k)\cdot r=u_0+u_0+n\cdot r\\&=u_0+u_n\end{aligned}$$

Notons, S la somme des premiers termes de la suite (u_n) :

$S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-2}+u_{n-1}+u_n$

Cette somme peut aussi s'écrire :

$S=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\cdots+u_2+u_1+u_0$

L'addition, termes à termes, des deux expressions de S permet d'obtenir l'égalité :

$$\begin{aligned}2\cdot S=&\,(u_0+u_n)+(u_1+u_{n-1})+(u_2+u_{n-2})\\&+\cdots+(u_{n-2}+u_2)+(u_{n-1}+u_1)+(u_n+u_0)\end{aligned}$$

D'après la remarque précédente :

$$\begin{aligned}2\cdot S=&\,(u_0+u_n)+(u_0+u_n)+(u_0+u_n)\\&+\cdots+(u_n+u_0)+(u_n+u_0)+(u_n+u_0)\end{aligned}$$

Cette somme comprend $n+1$ termes :

$$2\cdot S=(n+1)\cdot(u_0+u_n)$$

$$S=\frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Corollaire :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(n+1)(2\cdot u_0+n\cdot r)}{2}$$

Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Preuve :

Pour tout entier naturel ℓ, le terme de rang k admet pour expression :

$u_\ell=u_0+\ell\cdot r$

Ainsi, pour tout entier naturel k, on a :

$$\begin{aligned}u_k+u_{n-k}&=(u_0+k\cdot r)+\big[u_0+(n-k)\cdot r\big]\\&=u_0+k\cdot r+u_0+(n-k)\cdot r=u_0+u_0+n\cdot r\\&=u_0+u_n\end{aligned}$$

Notons, S la somme des premiers termes de la suite (u_n) :

$S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-2}+u_{n-1}+u_n$

Cette somme peut aussi s'écrire :

$S=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\cdots+u_2+u_1+u_0$

L'addition, termes à termes, des deux expressions de S permet d'obtenir l'égalité :

$$\begin{aligned}2\cdot S=&\,(u_0+u_n)+(u_1+u_{n-1})+(u_2+u_{n-2})\\&+\cdots+(u_{n-2}+u_2)+(u_{n-1}+u_1)+(u_n+u_0)\end{aligned}$$

D'après la remarque précédente :

$$\begin{aligned}2\cdot S=&\,(u_0+u_n)+(u_0+u_n)+(u_0+u_n)\\&+\cdots+(u_n+u_0)+(u_n+u_0)+(u_n+u_0)\end{aligned}$$

Cette somme comprend $n+1$ termes :

$$2\cdot S=(n+1)\cdot(u_0+u_n)$$

$$S=\frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Corollaire :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(n+1)(2\cdot u_0+n\cdot r)}{2}$$

Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Preuve :

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :

$$\mathcal{P}_n:\ S_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

- **Initialisation :**
  - $S_0=u_0$.
  - $\dfrac{(0+1)(u_0+u_0)}{2}=\dfrac{1\times(2\cdot u_0)}{2}=u_0$

  On en déduit que la propriété $\mathcal{P}_0$ est réalisée.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est-à-dire qu'on a la propriété :

  $$S_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

  Ainsi, on a les transformations suivantes :

$$S_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$
$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$
$$u_0+u_1+\cdots+u_n+u_{n+1}=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}+u_{n+1}$$

  On en déduit :

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)u_0+(n+1)u_n+2\cdot u_{n+1}}{2}$$

  L'expression explicite des termes d'une suite arithmétique permet d'écrire :

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)u_0+(n+1)(u_0+n\cdot r)+2\cdot\left[u_0+(n+1)r\right]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+1)u_0+(n+1)u_0+n(n+1)r+2u_0+2(n+1)r}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{2(n+1)u_0+n(n+1)r+2u_0+2(n+1)r}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{\left[(n+1)+1\right](2u_0)+(n+2)\left[(n+1)r\right]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(2u_0)+(n+2)\left[(n+1)r\right]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)\left[2u_0+(n+1)r\right]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)\Big[u_0+\left[u_0+(n+1)r\right]\Big]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(u_0+u_{n+1})}{2}$$

  On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et vérifie la propriété d'hérédité. Le raisonnement par récurrence montre que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Preuve :

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :

$$\mathcal{P}_n:\ S_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

- **Initialisation :**
  - $S_0=u_0$.
  - $\dfrac{(0+1)(u_0+u_0)}{2}=\dfrac{1\times(2\cdot u_0)}{2}=u_0$

  On en déduit que la propriété $\mathcal{P}_0$ est réalisée.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est-à-dire qu'on a la propriété :

  $$S_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

  Ainsi, on a les transformations suivantes :

$$S_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$
$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$
$$u_0+u_1+\cdots+u_n+u_{n+1}=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}+u_{n+1}$$

  On en déduit :

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)u_0+(n+1)u_n+2\cdot u_{n+1}}{2}$$

  L'expression explicite des termes d'une suite arithmétique permet d'écrire :

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)u_0+(n+1)(u_0+n\cdot r)+2\cdot\left[u_0+(n+1)r\right]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+1)u_0+(n+1)u_0+n(n+1)r+2u_0+2(n+1)r}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{2(n+1)u_0+n(n+1)r+2u_0+2(n+1)r}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{\left[(n+1)+1\right](2u_0)+(n+2)\left[(n+1)r\right]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(2u_0)+(n+2)\left[(n+1)r\right]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)\left[2u_0+(n+1)r\right]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)\Big[u_0+\left[u_0+(n+1)r\right]\Big]}{2}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(u_0+u_{n+1})}{2}$$

  On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et vérifie la propriété d'hérédité. Le raisonnement par récurrence montre que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

