On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

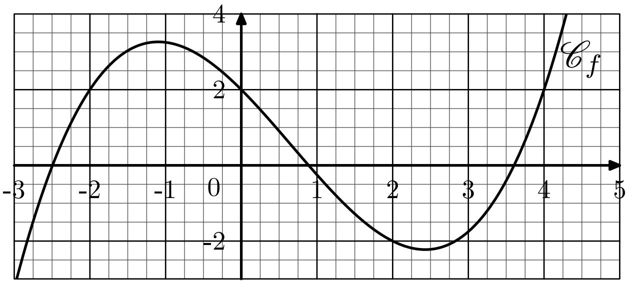
$$f(x) = \frac{1}{4}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x + 2$$

Le but de cet activité est de déterminer des valeurs approchées *(en fait des encadrements)* des solutions de l'équation :

$$f(x) = 0$$

Exercice 1

Dans un repère orthogonal, on donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $\big[-3\,;\,5\big]$:



1. Déterminer le signe des produits suivants :
   $f(-3)\cdot f(-2)$; $f(-2)\cdot f(-1)$; $f(2)\cdot f(3)$

2. Compléter le tableau ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Signe de $f(x)\cdot f(x{+}1)$								

3. Quelle particularité présente la fonction f sur les intervalles $\big[x\,;\,x+1\big]$ lorsque les produits $f(x)\cdot f(x+1)$ sont négatifs ?

Exercice 2

Nous allons étudier un algorithme recherchant les intervalles sur lesquelles la fonction f s'annule une fois :

1. Dans AlgoBox :
   a. La fonction `F1` représentera la fonction f, pour cela, dans l'onglet "*Utiliser une fonction numérique*", saisir la fonction f *(sans oublier que la puissance d'un nombre utilise la fonction* `pow`*)*.
   b. Puis saisir l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR -3
  TANT_QUE (a<5) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    b PREND_LA_VALEUR a+1
    SI (F1(a)*F1(b)<0) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "a="
      AFFICHER a
      AFFICHER " ; b="
      AFFICHER b ↩
      FIN_SI
    a PREND_LA_VALEUR b
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

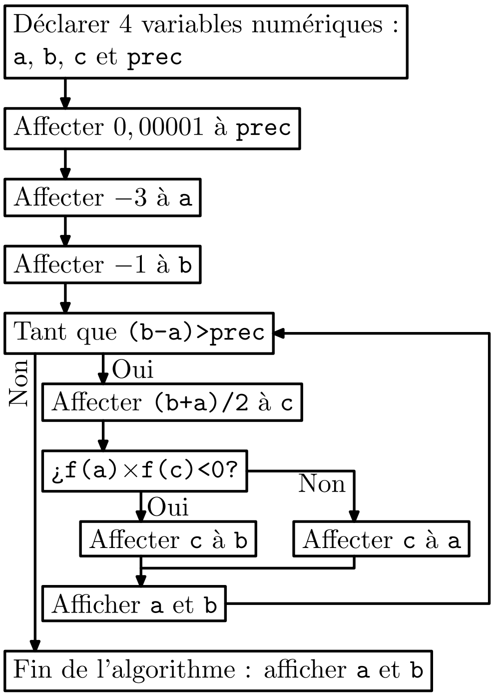
   c. Exécuter l'algorithme et justifier les résultats affichés par celui-ci.

2. Les intervalles d'étude de cet algorithme ont pour longueur 1. Modifions la précision de l'algorithme :
   a. Ajouter une nouvelle variable intitulée `esp` et initialisée avec la valeur 0,01.
   b. Modifier l'algorithme pour que, à chaque exécution de la boucle, l'intervalle $\big[a\,;\,b\big]$ a pour longueur `esp`.
   c. Exécuter l'algorithme est données les solutions de l'équation $f(x)$=0 au dixième près.

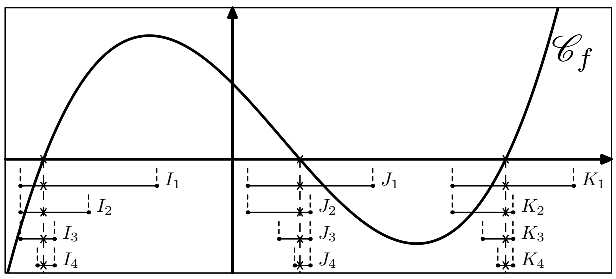
3. a. Donner les solutions de l'équation $f(x)$=0 au centième près.
   b. Donner les solutions de l'équation $f(x)$=0 à 10^{-6} près.
   c. Quelle est la nature de l'erreur provoquée par Algobox.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de construire un algorithme convergeant plus rapidement vers une des solutions de l'équation $f(x) = 0$; cet algorithme est appelé l'algorithme de dichotomie. Voici une description de cet algorithme :



Voici, pour chacune des trois solutions de l'équation $f(x) = 0$, la représentation des intervalles créés par cet algorithme au fur et à mesure de son exécution :



Considérons l'intervalle I_1 comprenant une solution de l'équation $f(x)$= $= 0$, à chaque itération de la boucle `Tant que`, l'algorithme ne conserve que la moitié de l'intervalle contenant toujours la solution.
Pour s'assurer que le nouvel intervalle contienne la solution, on s'assure que ses bornes `a` et `b` vérifient toujours l'inégalité `f(a)×f(b)<0`

1. Ecrire cet algorithme avec AlgoBox.

2. Modifier le programme afin que les valeurs de `a`, de `b` et de `prec` soit demandées au début de l'exécution du programme ; penser à ajouter un test afin que les deux valeurs saisies vérifient : `f(a)×f(b)<0`