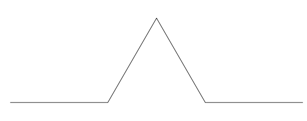
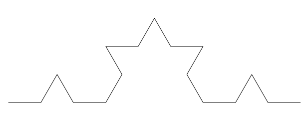
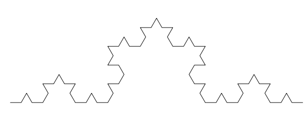
Les flocons de Helge Von Koch

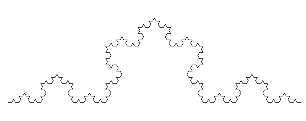
Helge Von Koch est un mathématicien du début du $XX^{\text{ième}}$ siècle.
Il inventa une courbe obtenue par itérations successives :

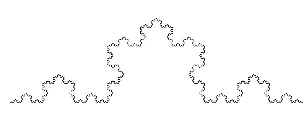
Itération n^o0


Itération n^o1

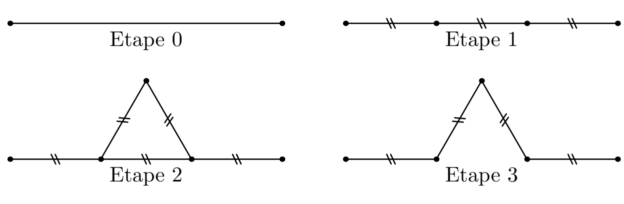

Itération n^o2


Itération n^o3


Itération n^o4


Itération n^o5

Pour passer d'une figure à la suivante, on réalise la manipulation suivante sur chaque segment :



Chaque segment est partagé en trois segments de même longueur ; Sur le segment du milieu, on construit un triangle équilatéral ; On supprime le segment du milieu.

Tout au long de l'exercice, nous considérons que le premier segment a une longueur de $3\,cm$.

1. Notons (u_n) la suite dont le terme u_n de rang n est le nombre de segment composant le flocon de Von Koch à l'itération n.
   a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 4^n$
   c. En déduire le nombre de segments présents à l'itération n^o7.

2. Nous allons maintenant étudier la longueur de la ligne brisée formant le flocon de Von Koch. Pour n un entier naturel, les segments composant la ligne brisée de l'itération n sont tous de même longueur.
   Notons v_n cette longueur. On vient ainsi de construire une suite (v_n).
   a. Donner une formule de récurrence définissant la suite (v_n).
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n = 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée composant le flocon de Von Koch à l'itération n.
   a. Déterminer l'expression de ℓ_n en fonction de n.
   b. A l'aide d'un tableur, on a généré les premiers termes de la suite (ℓ_n) arrondis au millimètre près :

	A	B	C	D	E
1	n	u_n		n	u_n
2	0	3		10	53,3
3	1	4		11	71
4	2	5,3		12	94,7
5	3	7,1		13	126,3
6	4	9,5		14	168,4
7	5	12,6		15	224,5
8	6	16,9		16	229,3
9	7	22,5		17	399,1
10	8	30		18	532,1
11	9	40		19	709,5

   Quelle conjecture peut-on effectuer sur la longueur d'un floncon de Von Koch lorsque le rang n tend vers $+\infty$?