Nombres dérivés et tangentes

A. Opérations algébriques:

1. Fonction dérivée d'une fonction produit:

Proposition :

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
La fonction f définie par le produit des fonctions u et v est une fonction dérivables sur I et dont la fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \big(x-1\big)\cdot\sqrt{x}$$

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x-1 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot\sqrt{x} + \big(x-1\big)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\cdot x + \big(x-1\big)}{2\sqrt{x}} = \frac{3\cdot x - 1}{2\sqrt{x}}$$

La fonction f' est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet pour tableau de signes :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variation de f	0	↘	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$	↗	

Preuve :

Diaporama de démonstration r468-0

2. Fonction dérivée d'une fonction quotient

Proposition :

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et telle que la fonction v ne s'annule pas sur I.
La fonction f définie par le quotient de la fonction u par la fonction v est une fonction dérivables sur I et dont la fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

L'expression de la fonction f est l'inverse de la fonction u définie par : $u(x) = x^2+1 \quad ; \quad u'(x) = 2\cdot x$
La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction permet d'exprimer la fonction f' dérivée de la fonction f :

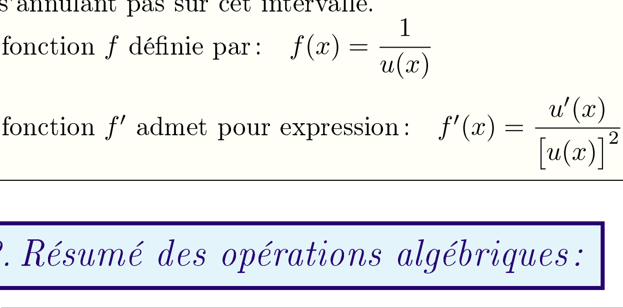
$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2} = -\frac{2\cdot x}{\big(x^2+1\big)^2}$$

On a les valeurs suivantes :

- $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$
- $f'(1) = -\frac{2\times1}{\big(1^2+1\big)^2} = -\frac{2}{2^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 s'exprime à l'aide de la formule :

$y = f'(1)\cdot\big(x-1\big) + f(1)$	$y = -\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{2}\cdot\big(x-1\big) + \frac{1}{2}$	$y = -\frac{1}{2}\cdot x + 1$



Preuve :

Diaporama de démonstration r468-1

Corollaire :

Soit u une fonction définie, dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur cet intervalle.
La fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{u(x)}$

La fonction f' admet pour expression : $f'(x) = \frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}$

3. Résumé des opérations algébriques:

	Expression algébrique	Dérivable sur	Fonction dérivée
a.	$k\cdot u$	I	$k\cdot u'$
b.	$u+v$	I	$u'+v'$
c.	$u-v$	I	$u'-v'$
d.	$k\cdot u+\ell\cdot v$	I	$k\cdot u'+\ell\cdot v'$
e.	$u\cdot v$	I	$u'\cdot v+u\cdot v'$
f.	$\frac{1}{v}$	$I\backslash\{x\in I\,\|\,v(x)\neq0\}$	$-\frac{v'}{v^2}$
g.	$\frac{u}{v}$	$I\backslash\{x\in I\,\|\,v(x)\neq0\}$	$\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

B. Composé par une fonction affine:

$f\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)$ $f(x)$ $f(2\cdot x)$