$$\frac{(u\cdot v)(x_0+h)-(u\cdot v)(x_0)}{h}=\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)v(x_0+h)+\left[-u(x_0)v(x_0+h)+u(x_0)v(x_0+h)\right]-u(x_0)v(x_0)}{h}$$

$$=\frac{\left[u(x_0+h)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0+h)\right]+\left[u(x_0)v(x_0+h)\right]-u(x_0)v(x_0)}{h}$$

$$=\frac{\left[u(x_0+h)-u(x_0)\right]\cdot v(x_0+h)+u(x_0)\cdot\left[v(x_0+h)-v(x_0)\right]}{h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0+h)+u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

On vient d'établir l'égalité ci-dessous pour toute valeur de h non-nulle :

$$\frac{(u\cdot v)(x_0+h)-(u\cdot v)(x_0)}{h}=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0+h)+u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}=u'(x_0) \quad ; \quad \lim_{h\mapsto 0}\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}=v'(x_0)$$

On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction $(u\cdot v)$ en x_0 :

$$(u\cdot v)'(x_0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{(u\cdot v)(x_0+h)-(u\cdot v)(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0+h)+u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

$$=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)$$