On souhaite établir la formule de dérivation d'un produit :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

C'est à dire qu'on ait la limite :

$$\lim_{h\mapsto 0} \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x_0+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x_0)}{h} = \frac{u'(x_0)\cdot v(x_0) - u(x_0)\cdot v'(x_0)}{\left[v(x_0)\right]^2}$$

$$\frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{u}{v}\right)(x_0)}{h}=\frac{\frac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h}$$

$$=\frac{\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0)}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}-\frac{u(x_0)\cdot v(x_0+h)}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}}{h}=\frac{\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0+h)}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}}{h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0+h)}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)v(x_0)+\left[-u(x_0)v(x_0)+u(x_0)v(x_0)\right]-u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$=\frac{\left[u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)\right]-\left[u(x_0)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)\right]}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$\frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{u}{v}\right)(x_0)}{h}$$

$$=\frac{\big[u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)\big]-\big[u(x_0)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)\big]}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$=\frac{\big[u(x_0+h)-u(x_0)\big]\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\big[v(x_0+h)-v(x_0)\big]}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$=\frac{\frac{\big[u(x_0+h)-u(x_0)\big]\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\big[v(x_0+h)-v(x_0)\big]}{h}}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}$$

$$=\frac{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}$$

On vient d'établir l'égalité ci-dessous pour toute valeur de h non-nulle :

$$\frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{u}{v}\right)(x_0)}{h}=\frac{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}$$

On en déduit l'expression de la dérivée d'un quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{u}{v}\right)(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}$$

$$=\frac{u'(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v'(x_0)}{\left[v(x_0)\right]^2}$$