Proposition :

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

La fonction f définie par le produit des fonctions u et v est une fonction dérivables sur I et dont la fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Preuve :

Soit u et b deux fonctions dérivables en un nombre x.

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{\big(u \cdot v\big)(x+h) - \big(u \cdot v\big)(x)}{h} = \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

$$= \frac{u(x+h)v(x+h) + \big[-u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h)\big] - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \frac{\big[u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)\big] + \big[u(x)v(x+h)\big] - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \frac{\big[u(x+h) - u(x)\big] \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \big[v(x+h) - v(x)\big]}{h}$$

$$= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) \quad ; \quad \lim_{h \mapsto 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$$

On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction $u \cdot v$ en x :

$$\big(u \cdot v\big)'(x) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{\big(u \cdot v\big)(x+h) - \big(u \cdot v\big)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \mapsto 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$