Proposition :

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et telle que la fonction v ne s'annule pas sur I.
La fonction f définie par le quotient de la fonction u par la fonction v est une fonction dérivables sur I et dont la fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

Preuve :

Soit u et v deux fonctions dérivables et x un nombre réel appartenant à l'ensemble de définition de la fonction $\frac{u}{v}$.

Déterminons le nombre dérivée de la fonction $\frac{u}{v}$ en x.

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{\left(\dfrac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\dfrac{u}{v}\right)(x)}{h} = \frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{u(x+h)\cdot v(x)}{v(x+h)\cdot v(x)} - \dfrac{u(x)\cdot v(x+h)}{v(x)\cdot v(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h)}{v(x)\cdot v(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h)}{v(x)\cdot v(x+h)\cdot h}$$

$$= \frac{u(x+h)v(x) + \big[-u(x)v(x) + u(x)v(x)\big] - u(x)v(x+h)}{v(x)\cdot v(x+h)\cdot h}$$

$$= \frac{\big[u(x+h)v(x) - u(x)v(x)\big] - \big[u(x)v(x+h) - u(x)v(x)\big]}{v(x)\cdot v(x+h)\cdot h}$$

$$= \frac{\big[u(x+h) - u(x)\big]\cdot v(x) - u(x)\cdot\big[v(x+h) - v(x)\big]}{v(x)\cdot v(x+h)\cdot h}$$

$$= \frac{\dfrac{\big[u(x+h) - u(x)\big]\cdot v(x) - u(x)\cdot\big[v(x+h) - v(x)\big]}{h}}{v(x)\cdot v(x+h)}$$

$$= \frac{\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}\cdot v(x) - u(x)\cdot\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x)\cdot v(x+h)}$$

On a les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$
- $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$
- $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} v(x)\cdot v(x+h) = \big[v(x)\big]^2$

On a la valeur du nombre dérivée de la fonction $\dfrac{u}{v}$ en x :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{\left(\dfrac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\dfrac{u}{v}\right)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\mapsto 0} \frac{\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}\cdot v(x) - u(x)\cdot\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x)\cdot v(x+h)}$$

$$= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$