Variables aléatoires

A. Variable aléatoire:

Définition :

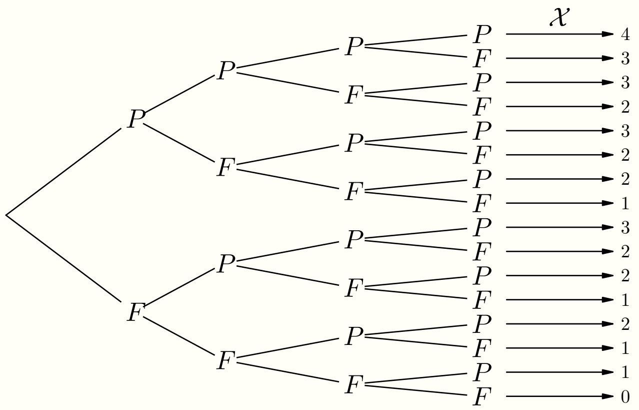
On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des évènements élémentaires forment un ensemble noté Ω. On appelle **variable aléatoire** toute fonction associant à chaque évènement élémentaire un nombre réel.

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce équilibrée quatre fois consécutivement et à chaque lancer noter la face obtenue.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui à chaque évènement élémentaire de cette expérience aléatoire compte le nombre de "*pile*" obtenu.

Voici l'arbre de choix de cette expérience aléatoire et la représentation de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

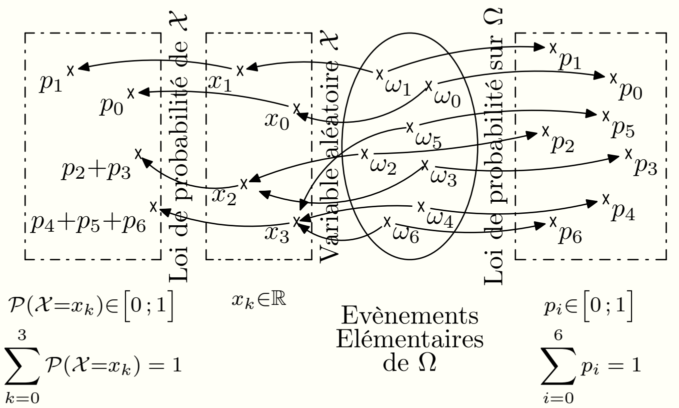


Définition :

On appelle **loi de probabilité de la variable aléatoire** $\mathcal{X}$ la connaissance de la probabilité d'apparition de chacune des valeurs prises de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Remarque :

- Le schéma ci-dessous représente une expérience aléatoire composée de 1 évèments élémentaires et d'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ prenant 1 valeurs distinctes.



- En classe de première, l'étude des variables aléatoires se fait pour des expériences aléatoires comprenant un nombre fini d'évèments élémentaires.
  Ainsi, la variable aléatoire ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes qu'on notera x_1, x_1, ..., x_n.

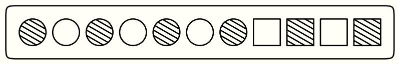
  La loi de probabilité de la variable aléatoire pourra être synthétisée par :

Valeurs prises par $\mathcal{X}$	x_1	x_2	...	x_n
Probabilité de la valeur	$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_1)$	$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_2)$	...	$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_n)$

Exemple :

Exercice

On considère une urne contenant des boules et des carrés qui sont blans ou rayés. Ci-dessous est représenté son contenu :



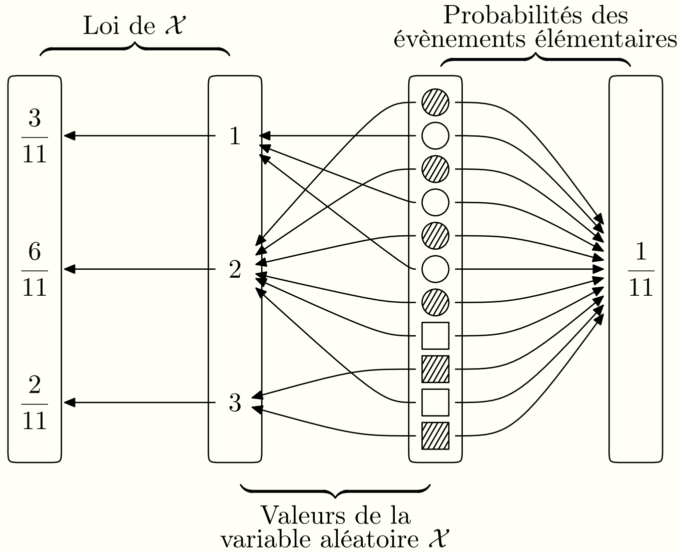
On considère l'expérience aléatoire consistant à retirer au hasard un objet de cette urne et la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque objet une valeur en suivant les règles suivantes :

- une boule vaut 1 et un carré vaut 2
- si l'élèment est rayé, la valeur est augmenté de 1.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$

Correction

Le schéma ci-dessous représente cette expérience aléatoire et la variable aléatoire $\mathcal{X}$:



La loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ est résumée dans le tableau ci-dessous :

x	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$	$\frac{3}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{2}{11}$

B. Espérance mathématiques:

Définition :

Considérons une expérience aléatoire dont l'ensemble des évènements élémentaires comprend n éléments :

$$\Omega = \{e_1\,;\,e_2\,;\,\dots\,;\,e_n\}$$

dont les éléments sont respectivement associés aux probabilités p_1, p_2, ..., p_n.

On appelle **espérance mathématique de l'expérience aléatoire** le nombre notée E définie par :

$$E = e_1\times p_1 + e_2\times p_2 + \cdots + e_n\times p_n$$

Définition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire associée à une expérience aléatoire et prenant les valeurs x_1, x_2, …, x_n.
On appelle **espérance mathématique de la variable aléatoire** $\mathcal{X}$ le nombre noté $E(\mathcal{X})$:

$$E(\mathcal{X}) = x_1 \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_1) + \cdots + x_n \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_n).$$

Remarque :

- Avec le symbole "$\sum$" somme, l'espérance se note :

$$E(\mathcal{X}) = \sum_{k=0}^{n} x_k \times \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_k)$$

- L'espérance définit la valeur moyenne de l'expérience aléatoire vue à travers la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- Lorque la variable aléatoire $\mathcal{X}$ représente le gain d'un jeu aléatoire, associé à une expérience aléatoire et si l'espérance vaut 0 *($E(\mathcal{X})=0$)*, on dira que l'expérience est **équitable**. Sinon, elle sera favorable à une des parties.

Exemple :

Dans le premier exemple, l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 1\times\frac{3}{11} + 2\times\frac{6}{11} + 3\times\frac{2}{11} = \frac{3}{11} + \frac{12}{11} + \frac{6}{11}$$

$$= \frac{21}{11} \simeq 1{,}91$$

Ainsi, on peut affirmer qu'en moyenne le gain de ce jeu est de 1,91 €.

C. Variances et écart-types:

Définition :

- La **variance** : $V(\mathcal{X}) = \sum_{k=0}^{n} \big[x_k - E(\mathcal{X})\big]^2 \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_k)$
- L'**écart-type** : $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})}$

Remarque :

- La variance s'appelle également "*la moyenne quadratique des écarts à la moyenne*". Cela signifie que :
  - pour chaque évènement élémentaire, on calcule l'écart à la moyenne de sa valeur par la fonction aléatoire
  - on élève cette valeur au carré
  - puis on fait la moyenne de toutes ces valeurs.

Voir la vidéo sur la variance dans une série statistique :

r202-0

- Il existe aussi la "*la moyenne absoblue des écarts à la moyenne*"

r202-1

qui est peu utilisé en mathématiques.

Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs.

Soit a et b deux nombres réels, alors on a :

$$E(a\cdot\mathcal{X}+b) = a\cdot E(\mathcal{X})+b \quad ; \quad V(a\cdot\mathcal{X}) = a^2\cdot V(\mathcal{X})$$

Preuve :

r208-0

