## Exercice 1

Ce polynôme admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-1)^2 - 4{\times}3{\times}(-2) = 1 + 24 = 25$
On a la simplification suivante :
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

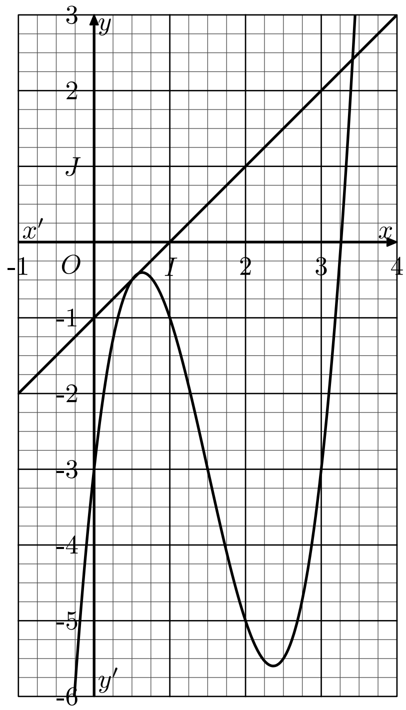
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)-5}{2{\times}3} = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{1+5}{2{\times}3} = \frac{6}{6} = 1$$

Le signe du coefficient du terme de second degré étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3{\cdot}x^2{-}x{-}1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |

## Exercice 2




2. a. On a le développement suivant :
$\big(2{\cdot}x-1\big)\big(x^2+b{\cdot}x+2\big) = 2{\cdot}x^3 + 2b{\cdot}x^2 + 4{\cdot}x - x^2 - b{\cdot}x - 2$
$= 2{\cdot}x^3 + \big(2b-1\big){\cdot}x^2 + \big(4-b\big) - 2$

L'identification des coefficients de même degré de ces polynômes sous forme dévelopée réduite permet d'obtenir les égalités suivantes :

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ 2b-1 = -9 \\ 4-b = 8 \\ -2 = -2 \end{cases}$$

On en déduit la valeur de $b$ : $b{=}-4$
Et on obtient la factorisation suivante :
$2{\cdot}x^3 - 9{\cdot}x^2 + 8{\cdot}x - 2 = \big(2{\cdot}x-1\big){\cdot}\big(x^2-4{\cdot}x+2\big)$

b. Pour savoir où la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$, considérons l'inéquation suivante :

$$f(x) > g(x)$$
$$2{\cdot}x^3 - 9{\cdot}x^2 + 9{\cdot}x - 3 > x - 1$$
$$2{\cdot}x^3 - 9{\cdot}x^2 + 9{\cdot}x - 3 - x + 1 > 0$$
$$2{\cdot}x^3 - 9{\cdot}x^2 + 8{\cdot}x - 2 > 0$$

D'après la question a., on a :
$\big(2{\cdot}x-1\big)\big(x^2-4{\cdot}x+2\big) > 0$
Etudions le second facteur qui est un polynome du second degré ayant pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-4\big)^2 - 4{\times}1{\times}2 = 16 - 8 = 9$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = \sqrt{4{\times}2} = 2{\cdot}\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-4)-2\sqrt{2}}{2{\times}1} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2{\cdot}(2-\sqrt{2})}{2} = 2-\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-4)+2\sqrt{2}}{2{\times}1} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2{\cdot}(2+\sqrt{2})}{2} = 2+\sqrt{2}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient la seconde ligne du tableau de signes ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2-\sqrt{2}$ | | $2+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\cdot x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-4\cdot x+2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x^3-9x^2+8x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi, l'équation $f(x)>g(x)$ admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S}=\Big]\dfrac{1}{2}\,;\,2-\sqrt{2}\Big[\cup\Big]2+\sqrt{2}\,;\,+\infty\Big[$

On en déduit :

- La courbe $\mathscr{C}_f$ est situé au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble :
  $\mathcal{S}=\Big]\dfrac{1}{2}\,;\,2-\sqrt{2}\Big[\cup\Big]2+\sqrt{2}\,;\,+\infty\Big[$
- La courbe $\mathscr{C}_f$ est situé en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble :
  $\mathcal{S}=\Big]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\Big[\cup\Big]2-\sqrt{2}\,;\,2+\sqrt{2}\Big[$