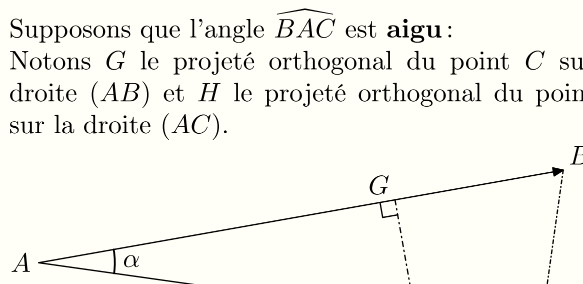
Proposition :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Preuve :

On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non-nul et on note α la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. On raisonnement par disjonction de cas :

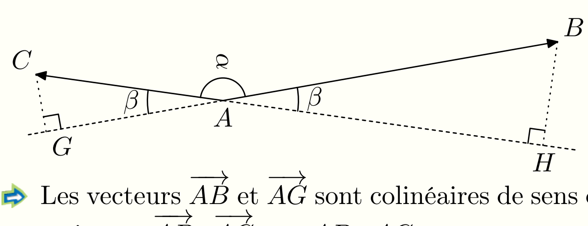
- Supposons que l'angle $\widehat{BAC}$ est **aigu** :
  Notons G le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) et H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).



  - Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ étant colinéaires et de même sens, on en déduit : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AG$
    Le triangle ACG étant rectangle en G, on a :
    $$\cos\widehat{CAG}=\frac{AG}{AC}\quad\Longrightarrow\quad AG=AC\times\cos\alpha$$
    Ainsi : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AG=AB\times AC\times\cos\alpha$
  - Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ étant colinéaires et de même sens, on en déduit : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AC\times AH$
    Le triangle ABH étant rectangle en H, on a le rapport trigonométrique :
    $$\cos\widehat{BAH}=\frac{AH}{AB}\quad\Longrightarrow\quad AH=AB\times\cos\alpha$$
    Ainsi : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AC\times AH=AC\times AB\times\cos\alpha$

  On vient d'établir : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

- Supposons que l'angle $\widehat{BAC}$ est obtu :
  Notons β l'angle supplémentaire à l'angle α, le point H projeté du point B sur la droite (AC), le point G projeté du point C sur la droite (AB).



  - Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires de sens contraires : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AG$
    Le triangle ACG est rectangle en G, on a le rapport trigonométrique :
    $$\cos\beta=\frac{AG}{AC}\quad\Longrightarrow\quad AG=AC\times\cos\beta$$
    On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AG=-AB\times AC\times\cos\beta$
  - Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de sens contraires : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=-AC\times AH$
    Le triangle ABH est rectangle en H, on a le rapport trigonométrique :
    $$\cos\beta=\frac{AH}{AB}\quad\Longrightarrow\quad AH=AB\times\cos\beta$$
    On a : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=-AC\times AH=-AC\times AH\times\cos\beta$

  On vient d'établir : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

- Les cas d'un angle α nul ou plat sont à traiter à part mais ne pose pas de difficulté.