Proposition :

Considérons trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

Preuve :

Prenons quatre points A, B, C, D tels que :

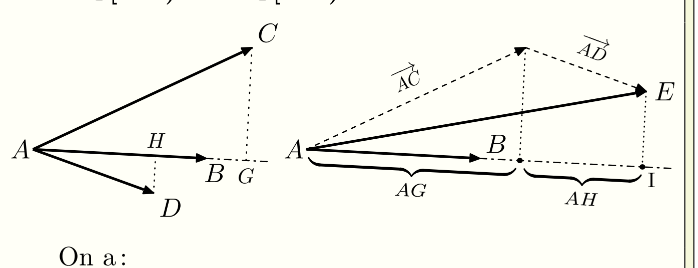
$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\quad ;\quad \vec{v}=\overrightarrow{AC}\quad ;\quad \vec{w}=\overrightarrow{AD}$$

et notons E le point tel que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

Notons G *(resp. H, I)* le projeté du point C *(resp. D, E)* sur la droite (AB).

Effectuons une disjonction de cas *(nous en ferons 2 sur les 6 nécessaires)* sur la position des points G et H sur la droite (AB) *(appartient ou non sur la demi-droite $[AB)$)*

- $\boldsymbol{G\in[AB)}$ et $\boldsymbol{H\in[AB)}$:



On a :

➩ $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$

$=AB\times AG+AB\times AH=AB\times\left(AG+AH\right)$

➩ De la décomposition :

$$\overrightarrow{AE}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{HD}\right)$$

où le premier terme est colinéaire $\overrightarrow{AB}$ et le second est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et d'après le lemme précédent, on en déduit : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}$.

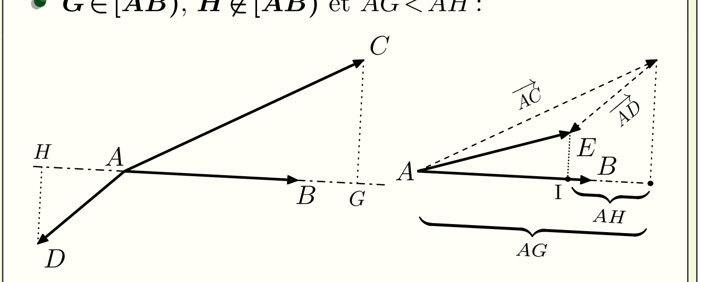
Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AH}$ étant colinéaires et de même sens, on en déduit : $AI=AG+AH$

On a : $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=AB\times AI=AB\times\left(AG+AH\right)$

On vient d'établir : $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

- $\boldsymbol{G\in[AB)}$, $\boldsymbol{H\notin[AB)}$ et $AG<AH$:



On a :

➩ $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$

$=AB\times AG+\left(-AB\times AH\right)=AB\times\left(AG-AH\right)$

➩ Par un raisonnement similaire au point précédent, on montre : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}$; $AI=AG-AH$

On a : $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=AB\times AI=AB\times\left(AG-AH\right)$

On vient d'établir : $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Lemme :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls du plan. Le vecteur $\vec{v}$ admet une et une unique décomposition :

$$\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$$

où $\vec{v_1}$ est un vecteur colinéaire au vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v_2}$ est un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

Preuve :

- **Existence :**

Considérons trois points A, B et C tels que :

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\quad ;\quad \vec{v}=\overrightarrow{AC}$$

Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). On a alors la décomposition suivante :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}$$

qui répond aux exigences de l'énoncé.

- **Unicité :**

Supposons que le vecteur $\vec{v}$ admette une seconde décomposition :

$$\vec{v}=\vec{v_1'}+\vec{v_2'}$$

où $\vec{v_1'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v_2'}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}$.

En reprenant les notations du point précédent, il existe un point I tels que :

$\vec{v_1'}=\overrightarrow{AI}$ \quad$\vec{v_2'}=\overrightarrow{IC}$

➩ Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ étant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$, on en déduit que le point I appartient à la droite (AB).

➩ Le vecteur $\overrightarrow{IC}$ étant orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$, on en déduit que la droite (IC) est perpendiculaire à la droite (AB).

Le point I est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Par unicité du projeté orthogonal, on en déduit :

$$I=H\quad\Longrightarrow\quad\vec{v_1'}=\vec{v_1}\quad ;\quad \vec{v_2'}=\vec{v_2}$$

La décoposition est unique.