Proposition :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et λ un nombre réel :

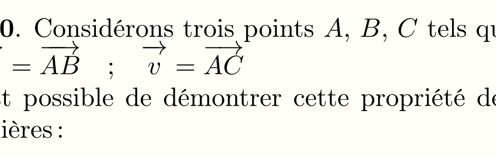
$$\left(\lambda\cdot\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v}=\lambda\times\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)$$

Preuve :

La démonstration de cette propriété se fait par un raisonnement par disjonction de cas sur la mesure de l'angle α *(nul, aigue, obtu, plat)* formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ainsi que pour le signe du coefficient λ *(négatif, nul, positif)*.

Dans cette preuve partielle, nous n'étudierons que la cas où l'angle est aigu. Il nous reste trois cas à étudier :

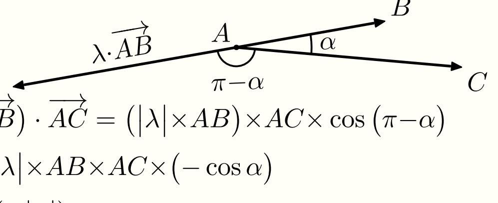
- $\boldsymbol{\lambda>0}$. Considérons trois points A, B, C tels que :
  $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$
  Il est possible de démontrer cette propriété de deux manières :
  - ***Avec la définition du produit scalaire :***

    - $\lambda\times\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)=\lambda\times\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\right)=\lambda\times\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AH}$
    - $\left(\lambda\cdot\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v}=\left(\lambda\cdot\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\lambda\times AB\right)\times AH$
      $=\lambda\times AB\times AH$
  - ***Avec la formule du cosinus :***
    - $\lambda\times\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)=\lambda\times\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$
      $=\lambda\times\left(AB\times AC\times\cos\alpha\right)=\lambda\times AB\times AC\times\cos\alpha$
    - Le vecteur $\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ est un vecteur colinéaire et de même sens *($\lambda>0$)* dont la norme est $\lambda\times AB$. De plus, l'angle formé par les vecteurs $\lambda\times\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ a toujours pour mesure α :
      $\left(\lambda\cdot\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\lambda\times AB\right)\times AC\times\cos\alpha$
      $=\lambda\times AB\times AC\times\cos\alpha$

  Ce qui prouve l'égalité : $\lambda\times\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)=\left(\lambda\cdot\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v}$
- $\boldsymbol{\lambda=0}$. On a les deux valeurs :
  - $\left(0\cdot\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{v}=0$
  - $0\times\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)=0$

  Ce qui prouve l'égalité : $\lambda\times\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)=\left(\lambda\cdot\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v}$
- $\boldsymbol{\lambda<0}$ avec la formule du cosinus sera étudiée ici :
  - $\lambda\times\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)=\lambda\times\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$
    $=\lambda\times\left(AB\times AC\times\cos\alpha\right)=\lambda\times AB\times AC\times\cos\alpha$
  - Le vecteur $\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ a pour norme $|\lambda|\times AB$.

  $\left(\lambda\cdot\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\left(|\lambda|\times AB\right)\times AC\times\cos\left(\pi-\alpha\right)$
  $=|\lambda|\times AB\times AC\times\left(-\cos\alpha\right)$
  $=\left(-|\lambda|\right)\times AB\times AC\times\cos\alpha=\lambda\times AB\times AC\times\cos\alpha$

  Ce qui prouve l'égalité : $\lambda\times\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)=\left(\lambda\cdot\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v}$