Proposition :

Dans le plan, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires :
  - et de même sens alors : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
  - et de sens contraire alors : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$

Preuve :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non-nuls. Prenons trois points A, B, C du plan tels que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'étant pas nul, les points A et B ne sont pas confondu. Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

- Supposons que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Alors le point C est son propre projeté sur la droite (AB).
  - Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens :
    $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = AB\times AC = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|$
  - Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraire :
    $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = -AB\times AC = -\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|$
- Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, le projeté H du point C sur la droite (AB) est le point A. On a : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = AB\times AH = AB\times 0 = 0$