Proposition :

Pour tout points A, B, C du plan, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ admet pour expression :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$$

Preuve :

Effectuons une disjonction de cas sur la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$:

- Si l'angle $\widehat{BAC}$ est **aigu**, on a montré que :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$$
- Si l'angle $\widehat{BAC}$ est **obtu**, en notant β l'angle supplémentaire à α, on a montré que :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC\times\cos\beta$$
La formule des angles associés "$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$"
Ainsi, on a :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC\times\cos\beta$$
$$=-AB\times AC\times\big(-\cos\alpha\big)=AB\times AC\times\cos\alpha$$
- A traiter également le cas d'un angle nul ou plat.

Corollaire :

Soit A, B, C trois points distincts deux à deux. On a :

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$$