Proposition :

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y')$. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = x\times x' + y\times y'$$

Preuve :

On a :

- $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}^2 = x\times x + y\times y = x^2+y^2$
- $\|\overrightarrow{v}\|^2 = \overrightarrow{v}^2 = x'\times x' + y'\times y' = x'^2+y'^2$

Notons $\overrightarrow{w}$ le vecteur défini par : $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

On a $\overrightarrow{w}(x+x'\,;y+y')$ et :

$$\|\overrightarrow{w}|^2 = \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2$$

$$= (x+x')\times(x+x')+(y+y')\times(y+y') = (x+x')^2+(y+y')^2$$

$$= x^2+2\times x\times x'+x'^2+y^2+2\times y\times y'+y'^2$$

Simplifions l'expression :

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - |\overrightarrow{v}\|^2$$

$$= (x^2+2\cdot x\cdot x'+x'^2+y^2+2\cdot y\cdot y'+y'^2)-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)$$

$$= 2\times x\times x'+2\times y\times y'$$

De l'expression du produit scalaire :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - |\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

On en déduit :

$$= \frac{1}{2}\cdot(2\times x\times x'+2\times y\times y') = x\times x'+y\times y'$$