Proposition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I :

- f est croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur I ;
- f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est négative sur I ;
- f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I.

Idée de preuve :

Nous allons nous intéresser au second point. Que ce soit pour l'implication directe ou la réciproque, les démonstrations font appel à des outils de terminales ou du supérieur :

- Supposons la fonction f décroissante sur $\big[a\,;b\big]$.
  Soit c un nombre appartenant à l'intervalle ouvert $\big]a\,;b\big[$.
  - Etude du nombre dérivée à droite :
    Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $c+h \in I$, on a les comparaisons suivantes :
    $$c < c+h$$
    La fonction f est décroissante :
    $$f(c) > f(c+h)$$
    $$0 > f(c+h) - f(c)$$
    Le nombre $\dfrac{1}{h}$ est strictement positif :
    $$\frac{0}{h} > \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
    $$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$$
    Par passage à la limite dans l'inéquation :
    $$\lim_{h\mapsto 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$$
    $$f'(c) \leqslant 0$$
  - Etude du nombre dérivée à droite :
    Soit $h \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $c+h \in I$, on a les comparaisons suivantes :
    $$c+h < c$$
    La fonction f est décroissante :
    $$f(c+h) > f(c)$$
    $$f(c+h) - f(c) > 0$$
    Le nombre $\dfrac{1}{h}$ est strictement négatif :
    $$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} < \frac{0}{h}$$
    $$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$$
    Par passage à la limite dans l'inéquation :
    $$\lim_{h\mapsto 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$$
    $$f'(c) \leqslant 0$$

  On en déduit que : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0$

  Ainsi, la fonction dérivée f' est négative sur I *(à établir cette propriété au borne de l'intervalle I).*

- Supposons que la fonction f' est négative sur l'intervalle $\big[a\,;b\big]$.
  Considérons deux nombres x_0 et x_1 appartenant à l'intervalle $\big[a\,;b\big]$.

  D'après le théorème des accroissement finis, il existe un réel c appartenant à l'intervalle $\big]x_0\,;x_1\big[$ vérifiant :
  $$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)\cdot\big(x_1 - x_0\big)$$

  On a les comparaisons suivantes :
  $$x_0 < x_1$$
  $$0 < x_1 - x_0$$
  $$x_1 - x_0 > 0$$
  Le nombre $f'(x)$ étant négatif :
  $$f'(c)\cdot\big(x_1 - x_0\big) \leqslant 0$$
  $$f(x_1) - f(x_0) \leqslant 0$$
  $$-f(x_0) \leqslant -f(x_1)$$
  $$f(x_0) \geqslant f(x_1)$$

  Deux nombres de l'intervalle $\big[a\,;b\big]$ et leurs images étant comparés dans le sens inverse, on en déduit que la fonction f est décroissante sur $\big[a\,;b\big]$.

Théorème : *(des accroissements finis - admis)*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\big[a\,;b\big]$ et dérivable sur l'intervalle $\big]a\,;b\big[$.
Il existe un réel $c \in \big]a\,;b\big[$ tel que :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$