2\. a. L'observation de la figure construite avec Geogebra permet d'affirmer que le minimum de la distance $[OA]$ est réalisée lorsque le point A a une abscisse d'environ 0,6.

b. On a pu observer que, lorsque le point A réalise le minimum de la distance OA, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point A est perpendiculaire au segment $[OA]$.

3\. a. Soit x l'abscisse du point A ; ainsi, le point A a pour coordonnées $\big(x\,;\ln x\big)$. La distance OA est alors donnée par la formule :

$$OA = \sqrt{x^2+\big(\ln x\big)^2}$$

Etudier le minimum de la distance OA revient à étudier le minimum de la fonction g définit par :

$$g(x) = x^2+\big(\ln x\big)^2$$

Cette fonction admet la dérivée suivante :

$$g'(x) = 2x+2{\cdot}\frac{1}{x}{\cdot}\ln x = 2x+\frac{2{\cdot}\ln x}{x}$$
$$= \frac{2x^2}{x}+\frac{2{\cdot}\ln x}{x} = \frac{2x^2+2{\cdot}\ln x}{x}$$
$$= \frac{2{\cdot}\big(x^2+\ln x\big)}{x}$$

ainsi, le minimum de la distance d est réalisé lorsque x_0 vérifie :

$$g'(x_0) = 0$$
$$\frac{2{\cdot}\big(x_0^2+\ln x_0\big)}{x_0} = 0$$
$$x_0^2+\ln x_0 = 0$$

b. Le point A_0 a pour coordonnées $\Big(x_0\,;f(x_0)\Big)$; le vecteur $\overrightarrow{OA_0}$ a pour vecteur directeur $\Big(x_0\,;\ln(x_0)\Big)$.

La tangente (Δ_0) a pour coefficient directeur $\overrightarrow{u}\left(1\,;\frac{1}{x_0}\right)$.

Déterminons le produit scalaire suivant :

$$\overrightarrow{OA_0}{\cdot}\overrightarrow{u} = x_0{\cdot}1+\ln(x_0){\cdot}\frac{1}{x_0} = x_0{\cdot}1+\ln(x_0){\cdot}\frac{1}{x_0}$$
$$= x_0+\frac{\ln(x_0)}{x_0} = \frac{x_0^2+\ln(x_0)}{x_0}$$

Or, d'après la question précédente :

$$= \frac{0}{x_0} = 0$$