Proposition :

Soit M un point et (P) un plan de l'espace.

- On appelle **projeté orthogonal** du point M_0 sur le plan (P) le point H d'intersection du plan (P) et de la droite perpendiculaire au plan (P) passant par le point M_0.
- On définit la distance du point M_0 au point H par la distance M_0H.
- On considère l'espace muni d'un repère orthonormal où $M_0\,(\,x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\,)$ et (P) a pour équation :
  $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c{\cdot}z.$
  La distance du point M_0 au plan (P) est égale à :
  $$\frac{\big|a{\cdot}x_0+b{\cdot}y_0+c{\cdot}z_0\big|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Preuve :

Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(\,a\ ;\ b\ ;\ c\,)$ est un vecteur normal au plan (P).

Soit H le projeté orthogonal du point $M_0\,(\,x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\,)$ sur le plan (P) ; on a pour tout point $M\,(\,x\ ;\ y\ ;\ z\,)$ du plan :

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{n} &= (x-x_0){\cdot}a+(y-y_0){\cdot}b+(z-z_0){\cdot}c\\ &= \big(a{\cdot}x+b{\cdot}y+c{\cdot}z\big)-a{\cdot}x_0-b{\cdot}y_0-c{\cdot}z_0\end{aligned}$$
  Le point M est un point du plan (P) :
  $$= -d-a{\cdot}x_0-b{\cdot}y_0-c{\cdot}z_0$$
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{n} &= \big(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HM_0}\big)\cdot\overrightarrow{n}\\ &= \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{n}+\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\end{aligned}$$
  Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ appartient au plan (P) :
  $$\begin{aligned}&= 0+\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\\ &= \overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\end{aligned}$$
  Les vecteurs $\overrightarrow{HM_0}$ et $\overrightarrow{n}$ sont tous deux normals au plan (P), on en déduit qu'ils sont colinéaires entre eux. Ainsi, on a la valeur du produit scalaire :

$\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}=HM_0{\times}\|\overrightarrow{n}\|$ ou $\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}=-HM_0{\times}\|\overrightarrow{n}\|$

Ainsi, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\big|\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\big| &= \big|\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\big|\\ \big|-d-a{\cdot}x_0-b{\cdot}y_0-c{\cdot}z_0\big| &= HM_0{\times}\|\overrightarrow{n}\|\\ \big|a{\cdot}x_0+b{\cdot}y_0+c{\cdot}z_0+d\big| &= HM_0{\times}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\ HM_0 &= \frac{\big|a{\cdot}x_0+b{\cdot}y_0+c{\cdot}z_0+d\big|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

Au passage, on a établit la formule :

$$M_0H=\frac{\big|\overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{n}\big|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

où M est un point quelconque du plan (P).

Proposition :

Soit M un point et (P) un plan de l'espace.

- On appelle **projeté orthogonal** du point M_0 sur le plan (P) le point H d'intersection du plan (P) et de la droite perpendiculaire au plan (P) passant par le point M_0.
- On définit la distance du point M_0 au point H par la distance M_0H.
- On considère l'espace muni d'un repère orthonormal où $M_0\,(\,x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\,)$ et (P) a pour équation :
  $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c{\cdot}z.$
  La distance du point M_0 au plan (P) est égale à :
  $$\frac{\big|a{\cdot}x_0+b{\cdot}y_0+c{\cdot}z_0\big|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Preuve :

Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(\,a\ ;\ b\ ;\ c\,)$ est un vecteur normal au plan (P).

Soit H le projeté orthogonal du point $M_0\,(\,x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\,)$ sur le plan (P) ; on a pour tout point $M\,(\,x\ ;\ y\ ;\ z\,)$ du plan :

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{n} &= (x-x_0){\cdot}a+(y-y_0){\cdot}b+(z-z_0){\cdot}c\\ &= \big(a{\cdot}x+b{\cdot}y+c{\cdot}z\big)-a{\cdot}x_0-b{\cdot}y_0-c{\cdot}z_0\end{aligned}$$
  Le point M est un point du plan (P) :
  $$= -d-a{\cdot}x_0-b{\cdot}y_0-c{\cdot}z_0$$
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{n} &= \big(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HM_0}\big)\cdot\overrightarrow{n}\\ &= \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{n}+\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\end{aligned}$$
  Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ appartient au plan (P) :
  $$\begin{aligned}&= 0+\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\\ &= \overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\end{aligned}$$
  Les vecteurs $\overrightarrow{HM_0}$ et $\overrightarrow{n}$ sont tous deux normals au plan (P), on en déduit qu'ils sont colinéaires entre eux. Ainsi, on a la valeur du produit scalaire :

$\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}=HM_0{\times}\|\overrightarrow{n}\|$ ou $\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}=-HM_0{\times}\|\overrightarrow{n}\|$

Ainsi, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\big|\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\big| &= \big|\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\big|\\ \big|-d-a{\cdot}x_0-b{\cdot}y_0-c{\cdot}z_0\big| &= HM_0{\times}\|\overrightarrow{n}\|\\ \big|a{\cdot}x_0+b{\cdot}y_0+c{\cdot}z_0+d\big| &= HM_0{\times}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\ HM_0 &= \frac{\big|a{\cdot}x_0+b{\cdot}y_0+c{\cdot}z_0+d\big|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

Au passage, on a établit la formule :

$$M_0H=\frac{\big|\overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{n}\big|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

où M est un point quelconque du plan (P).