Proposition :

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\overrightarrow{n}$ un vecteur de l'espace. Pour que $\overrightarrow{n}$ soit un vecteur normal au plan, il suffit que $\overrightarrow{n}$ soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Preuve :

Prenons deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ non colinéaires orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$; ainsi, le triplé $\big(O\,;\ \overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\big)$ forment un repère du plan $\mathcal{P}$.

Soit $\overrightarrow{\omega}$ un vecteur quelconque du plan $\mathcal{P}$, il existe deux nombres réels α et β vérifiant :
$\overrightarrow{\omega} = \alpha{\cdot}\overrightarrow{u} + \beta{\cdot}\overrightarrow{v}$

On en déduit la valeur suivante du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\omega}\cdot\overrightarrow{n} &= \big(\alpha{\cdot}\overrightarrow{u} + \beta{\cdot}\overrightarrow{v}\big)\cdot\overrightarrow{n}\\
&= \big(\alpha{\cdot}\overrightarrow{u}\big)\cdot\overrightarrow{n} + \big(\beta{\cdot}\overrightarrow{v}\big)\cdot\overrightarrow{n}\\
&= \alpha{\cdot}\big(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}\big) + \beta{\cdot}\big(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}\big)\\
&= \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur ω du plan $(\mathcal{P})$.

Proposition :

Considérons A un point et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à la droite $\big(A\,;\ \overrightarrow{n}\big)$

Définition :

Soit A et B deux points de l'espace. On appelle plan médiateur de $[AB]$, le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et admettant $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal.

Ce plan est l'ensemble des points équidistants aux points A et B.

Lemme :

Tout plan admet au moins un vecteur normal

Preuve :

Soit $\overrightarrow{u}\,(\,x\ ;\ y\ ;\ z\,)$ et $\overrightarrow{v}\,\big(\,x'\ ;\ y'\ ;\ z'\,\big)$ deux vecteurs non-colinéaires du plan $(\mathcal{P})$.

Supposons l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0$

En notant $\overrightarrow{n}\,(\,a\ ;\ b\ ;\ c\,)$, on a :

$$\begin{cases} a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z = 0\\ a{\cdot}x' + b{\cdot}y' + c{\cdot}z' = 0\end{cases}$$
$$\Longrightarrow a{\cdot}(x-x') + b{\cdot}(y-y') + c{\cdot}(z-z') = 0$$

Or, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant non colinéaires, le triplet $\big(\,x-x'\ ;\ y-y'\ ;\ z-z'\,\big)$ est non nul.

En supposant que $z-z'$ est non nul, on obtient :
$$c = \frac{a{\cdot}(x-x') + b{\cdot}(x-x')}{z-z'}$$

Ainsi, pour tout réel a et b, le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\left(\,a\ ;\ b\ ;\ \dfrac{a{\cdot}(x-x') + c{\cdot}(y-y')}{z-z'}\,\right)$ est normal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan P

Propriété :

Soit un repère orthonormé de l'espace.

- Si a, b, c, d sont quatres réels tels que a, b, c soient non tous nuls $\big(\big(\,a\ ;\ b\ ;\ c\,\big) \neq \big(\,0\ ;\ 0\ ;\ 0\,\big)\big)$; l'ensemble des points $M\,(\,x\ ;\ y\ ;\ z\,)$ vérifiant :
  $a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d = 0$
  est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,\big(\,a\ ;\ b\ ;\ c\,\big)$.
  L'équation $a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d = 0$ s'appelle l'équation cartésienne de ce plan.
- Réciproquement, tout plan admet une équation de cette forme.

Preuve :

- Considérons $d \in \mathbb{R}$ un triplet de réels $(\,a\ ;\ b\ ;\ c\,)$ tel que :
  $(\,a\ ;\ b\ ;\ c\,) \neq \big(\,0\ ;\ 0\ ;\ 0\,\big)$
  En supposant que $a \neq 0$, le triplet $\left(\,-\dfrac{d}{a}\ ;\ 0\ ;\ 0\,\right)$ est solution de cette équation ; ainsi, l'ensemble des solutions est non vide.
  Considérons $A\,(\,x_0\ ;\ y_0\ ;\ y_0\,)$ une solution de cette équation et $M\,(\,x\ ;\ y\,)\,z$ une autre solution de cette équation. On a :
  $$\begin{cases} a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d = 0\\ a{\cdot}x_0 + b{\cdot}y_0 + c{\cdot}z_0 + d = 0\end{cases}$$
  $$\Longrightarrow a{\cdot}(x-x_0) + b{\cdot}(y-y_0) + c{\cdot}(z-z_0) = 0$$
  Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ ayant pour coordonnées $\overrightarrow{AM}\,(\,x-x_0\ ;\ y-y_0\ ;\ z-z_0\,)$ et considérant le vecteur $\overrightarrow{n}\,(\,a\ ;\ b\ ;\ c\,)$, on en déduit :
  $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = 0$
  Les points M vérifiant cette relation est l'ensemble des points du plan passant par le point A et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal.
- Soit $(\mathcal{P})$ un plan et $A\,(\,x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\,)$ un point de ce plan. D'après le lemme précédent, il existe un vecteur $\overrightarrow{n}\,(\,a\ ;\ b\ ;\ c\,)$ normal à ce plan.
  Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan $(\mathcal{P})$; en prenant $M\,(\,x\ ;\ y\,)\,z$ un point quelconque du plan, on a :
  $$\begin{aligned}
  \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AM} &= 0\\
  a{\cdot}(x-x_0) + b{\cdot}(y-y_0) + c{\cdot}(z-z_0) &= 0\\
  a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + \big[-a{\cdot}x_0 - b{\cdot}y_0 - c{\cdot}z_0\big] &= 0
  \end{aligned}$$
  qui est de la forme :
  $$a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d = 0$$