Proposition :

Tout polynôme du second degré $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ admet une écriture de la forme suivante appelée forme canonnique :

$$a\big(x-\alpha\big)^2+\beta$$

Preuve :

Sachant que le polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ est un polynôme du second degré, on a $a\neq 0$. Lors de cette preuve, on utilisera le résultat suivant :

$$\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2 = x^2+\frac{b}{a}{\cdot}x+\frac{b^2}{4{\cdot}a^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad x^2+\frac{b}{a}{\cdot}x = \Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{b^2}{4{\cdot}a^2}$$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c = a{\cdot}\Big(x^2+\frac{b}{a}{\cdot}x\Big)+c$$

En utilisant la propriété précédente :

$$\begin{aligned}
&= a{\cdot}\Big[\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{b^2}{4{\cdot}a^2}\Big]+c\\
&= a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-a{\cdot}\frac{b^2}{4{\cdot}a^2}+c\\
&= a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\Big(\frac{b^2}{4{\cdot}a}-c\Big)\\
&= a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\Big(\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}\Big)\\
&= a{\cdot}\Big[x-\Big(-\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)\Big]^2+\Big(-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}\Big)\\
&= a{\cdot}\big(x-\alpha\big)^2+\beta
\end{aligned}$$

La forme obtenue est la forme souhaitée avec pour valeur :

$$\alpha=-\frac{b}{2a} \quad ; \quad \beta=-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

La forme canonique est parfois utilisée sous la forme :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c = a{\cdot}\Big[\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}\Big]$$