

Complexes et géométrie

A. Module:

Définition:

Soit z un nombre complexe quelconque admettant pour écriture algébrique:

$$z = a + i \cdot b \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

On appelle **module du nombre complexe** z le nombre réel noté $|z|$ ayant pour définition:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposition:

Soit z et z' deux nombres complexes. On a les relations suivantes:

a. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

b. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

c. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |z^n| = |z|^n$

d. $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ où $z \neq 0$

e. $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ où $z' \neq 0$

Preuve:

a. Notons $z = x + i \cdot y$ l'écriture algébrique du nombre complexe z . On a:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x + i \cdot y)(x - i \cdot y) = x^2 - i \cdot x \cdot y + i \cdot y \cdot x - i^2 \cdot y^2 \\ &= x^2 - (-1) \cdot y^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

b. Déterminons une expression simplifiée du carré de chacun des membres de l'égalité:

$$\begin{aligned} |z \times z'|^2 &= |(x + i \cdot y) \times (x' + i \cdot y')|^2 \\ &= |x \cdot x' + i \cdot x \cdot y' + i \cdot x' \cdot y + i^2 \cdot y \cdot y'|^2 \\ &= |x \cdot x' + i \cdot (x \cdot y' + x' \cdot y) + (-1) \cdot y \cdot y'|^2 \\ &= |(x \cdot x' - y \cdot y') + i \cdot (x \cdot y' + x' \cdot y)|^2 \\ &= (x \cdot x' - y \cdot y')^2 + (x \cdot y' + x' \cdot y)^2 \\ &= x^2 \cdot x'^2 - 2x \cdot x' \cdot y \cdot y' + y^2 \cdot y'^2 + x^2 \cdot y'^2 + 2x \cdot x' \cdot y \cdot y' + x'^2 \cdot y^2 \\ &= x^2 \cdot x'^2 + y^2 \cdot y'^2 + x^2 \cdot y'^2 + x'^2 \cdot y^2 \\ |z| \times |z'| &= |z|^2 \times |z'|^2 = (x^2 + y^2) \cdot (x'^2 + y'^2) \\ &= x^2 \cdot x'^2 + x^2 \cdot y'^2 + y^2 \cdot x'^2 + y^2 \cdot y'^2 \end{aligned}$$

On obtient: $|z \times z'|^2 = (|z| \times |z'|)^2$

Ainsi, les deux nombres $|z \times z'|$ et $|z| \times |z'|$ sont positifs et de carrés égaux: ces deux nombres sont égaux.

c. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul par la relation: $\mathcal{P}_n$: " $|z^n| = |z|^n$ "

● **Initialisation:** $|z^1| = |z|$; $|z|^1 = |z|$
On vient de montrer que $\mathcal{P}_1$.

● **Hérédité:**

Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ réalisée pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est-à-dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante: $|z^n| = |z|^n$

Etudions l'expression suivante:

b. $|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z| = |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}$

On vient de montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

● **Conclusion:**

La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. Par un raisonnement par

récurrence, on a établi que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

d. Soit z un nombre complexe non-nul:

$$\left| \frac{1}{z} \right|^2 = \left(\frac{1}{z} \right) \cdot \overline{\left(\frac{1}{z} \right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1^2}{|z|^2} = \left(\frac{1}{|z|} \right)^2$$

Les deux nombres $\left| \frac{1}{z} \right|$ et $\frac{1}{|z|}$ étant positifs et leur carré

étant égaux, on en déduit: $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

e. Etablit à l'aide des propriétés b. et d..

B. Plan complexe:

Rappel

- A tout nombre complexe z admettant l'écriture algébrique $a + i \cdot b$, on associe un unique point M du plan appelé **image de z** de coordonnées $M(x; y)$.
- A tout point M du plan de coordonnées $M(x; y)$, on associe un unique nombre complexe z appelé **affixe du point M** ayant pour écriture algébrique $z = a + i \cdot b$.

Remarque:

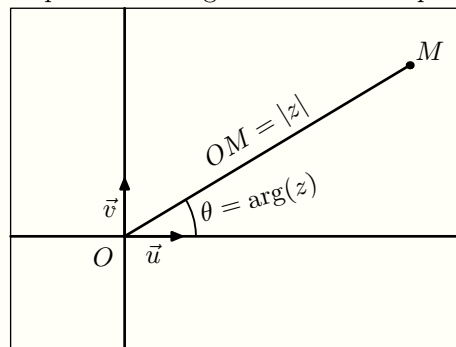
Soit z un nombre complexe et M son image. On a:
 $[z] = OM$

Définition:

Soit z un nombre complexe non-nul et M son image. Un **argument du nombre complexe z** est un nombre réel θ tel que: $(\vec{u}; \vec{OM}) = \theta$
Tout argument du nombre complexe z est noté $\arg(z)$.

Remarque:

Le module et l'argument d'un nombre complexe z non-nul permet de repérer son image de manière unique:



Proposition:

Deux nombres complexes z et z' non-nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont même modules et même arguments.

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') \quad [2\cdot\pi] \end{cases}$$

Proposition:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

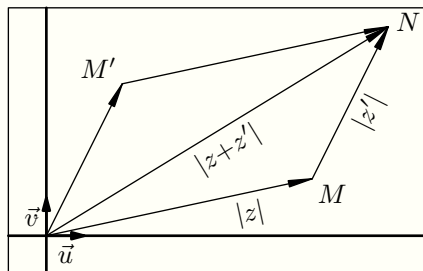
Preuve:

Soit M et M' deux points distincts de O et d'affixes respectifs z et z' . Soit N tel que $OMNM'$ soit un parallélogramme. D'après l'inégalité triangulaire dans le plan

euclidien :

$$ON \leq OM + OM'$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$



Définition :

Soit M et N deux points du plan d'affixes respectives z et z' . L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est le nombre complexe $z' - z$.

Remarque :

L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est indépendant des points choisis pour le représenter.

Soit A, B, C et D quatre points tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$:

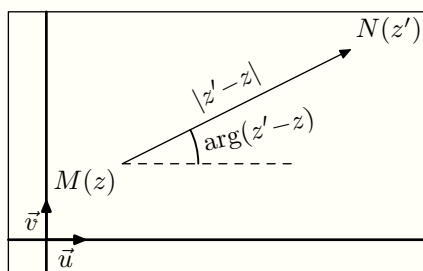
$$z_B - z_A = z_D - z_C$$

Proposition :

Soit M et N deux points d'affixes respectives z et z' .

On a :

- $MN = |z_N - z_M|$
- Si M et N sont distincts : $\arg(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{MN}) = \arg(z' - z)$



C. Forme trigonométrique :

Proposition définition

Soit z un nombre complexe non-nul de module r et d'argument θ . Le nombre complexe z admet l'écriture suivante :

$$z = r \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

On appelle cette écriture : écriture trigonométrique du nombre z .

Théorème :

Soit z et z' deux nombres complexes non-nuls admettant les écritures trigonométriques suivantes :

$$z = r \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta) \quad ; \quad z' = r' \cdot (\cos \theta' + i \cdot \sin \theta')$$

On a les écritures trigonométriques des nombres complexes suivants :

- $\bar{z} = r \cdot [\cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta)]$
- $z \cdot z' = r \cdot r' \cdot [\cos(\theta + \theta') + i \cdot \sin(\theta + \theta')]$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot [\cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta)]$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} \cdot [\cos(\theta - \theta') + i \cdot \sin(\theta - \theta')]$

Démonstration :

- $\bar{z} = r \cdot (\cos \theta - i \cdot \sin \theta) = r \cdot [\cos(-\theta) + i \cdot (-\sin \theta)]$
 $= r \cdot [\cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta)]$
- $z \cdot z' = [r \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)] \cdot [r' \cdot (\cos \theta' + i \cdot \sin \theta')]$
 $= r \cdot r' \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta) \cdot (\cos \theta' + i \cdot \sin \theta')$
 $= r \cdot r' \cdot (\cos \theta \cdot \cos \theta' + i \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta' + i \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta' + i^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta')$
 $= r \cdot r' \cdot [(\cos \theta \cdot \cos \theta' - \sin \theta \cdot \sin \theta') + i \cdot (\cos \theta \cdot \sin \theta' + \sin \theta \cdot \cos \theta')]$
 $= r \cdot r' \cdot [\cos(\theta + \theta') + i \cdot \sin(\theta + \theta')]$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \theta + i \cdot \sin \theta}$
 $= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \theta - i \cdot \sin \theta}{(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)(\cos \theta - i \cdot \sin \theta)}$
 $= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \theta - i \cdot \sin \theta}{(\cos \theta)^2 - i^2 \cdot \sin^2 \theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos(-\theta) + i \cdot (-\sin \theta)}{(\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}$
 $= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta)}{1} = \frac{1}{r} \cdot [\cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta)]$
- On a : $\frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'}$

où les nombres complexes z et $\frac{1}{z'}$ sont définis par :

$$|z| = r \quad ; \quad |z'| = \frac{1}{r'} \quad ; \quad \arg(z) = \theta \quad ; \quad \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\theta'$$

La formule du produit précédemment démontrée permet de donner l'écriture trigonométrique du produit :

$$z \cdot \frac{1}{z'} = r \cdot \frac{1}{r'} \cdot [\cos[\theta + (-\theta')] + i \cdot \sin[\theta + (-\theta')]]$$

$$= \frac{r}{r'} \cdot [\cos(\theta - \theta') + i \cdot \sin(\theta - \theta')]$$

D. Forme exponentielle :

Définition - proposition

- Pour tout nombre réel θ , on note :
 $e^{i \cdot \theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$
- Pour tout nombre complexe non nul z , il existe un réel r strictement positif et un réel $\theta \in]-\pi ; \pi]$:
 $z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$
On appelle cette écriture du complexe z , l'écriture exponentielle de z

Remarque :

- Par sa définition, $e^{i \cdot \theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .
- Soit z un nombre complexe non-nul. Le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ a pour module 1 ; ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :
 $\frac{z}{|z|} = 1 \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta) \implies \frac{z}{|z|} = e^{i \cdot \theta}$
 $\implies z = |z| \cdot e^{i \cdot \theta}$
Il existe un réel r strictement positif :
 $\implies z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$

Proposition:

Soit z et z' deux nombres complexes non-nuls admettant les forme exponentielles suivantes :

$$z = r \cdot e^{i \cdot \theta} \quad ; \quad z' = r' \cdot e^{i \cdot \theta'}$$

On a les propriétés suivantes :

- $z \cdot z' = (r \cdot r') \cdot e^{i \cdot (\theta + \theta')}$ • $z^n = (r^n) \cdot e^{i \cdot (n \cdot \theta)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right) \cdot e^{-i \cdot \theta}$ • $\frac{z}{z'} = \left(\frac{r}{r'}\right) \cdot e^{i \cdot (\theta - \theta')}$

Preuve:

- A l'aide du module et l'argument du produit :
 $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad ; \quad \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$

$$\text{Ainsi: } z \cdot z' = (|z| \cdot |z'|) \cdot e^{i \cdot (\theta + \theta')}$$

- A l'aide du module et l'argument de la puissance :
 $|z^n| = |z|^n \quad ; \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$

$$\text{Ainsi: } z^n = (|z|^n) \cdot e^{i \cdot (n \cdot \theta)}$$

- A l'aide du module et l'argument de l'inverse :
 $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad ; \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

$$\text{Ainsi: } \frac{1}{z} = \left|\frac{1}{z}\right| \cdot e^{-i \cdot \theta}$$

- A l'aide du module et l'argument du quotient :
 $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad ; \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

$$\text{Ainsi: } \frac{z}{z'} = \left(\frac{|z|}{|z'|}\right) \cdot e^{i \cdot (\theta - \theta')}$$

E. Complexe et géométrie:

Corollaire:

Soit A, B, C trois points du plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ distincts deux à deux. On note z_A, z_B, z_C leurs affixes respectives. On a :

- $AB = |z_B - z_A| \quad ; \quad (\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
- $\frac{CB}{CA} = \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| \quad ; \quad (\vec{CA}; \vec{CB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$

Exemple:

On considère les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \quad ; \quad z_B = -1 - i$$

$$z_C = -3 - 3 \cdot i \quad ; \quad z_D = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot i$$

On effectue les calculs pour obtenir l'écriture algébrique des quotients :

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \quad ; \quad \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$$

- On a $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = 2$ et ces trois points sont distincts deux à deux :

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg(2) \implies \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = 0$$

$$\implies (\vec{CA}; \vec{CB}) = 0$$

$$\implies \text{Les points } A, B, C \text{ sont alignés.}$$

- On a : $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$

De plus, les points A, B et D sont distincts deux à deux :

$$\left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$$

$$\left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$$

$$\frac{AD}{AB} = 1$$

$$AD = AB$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$$

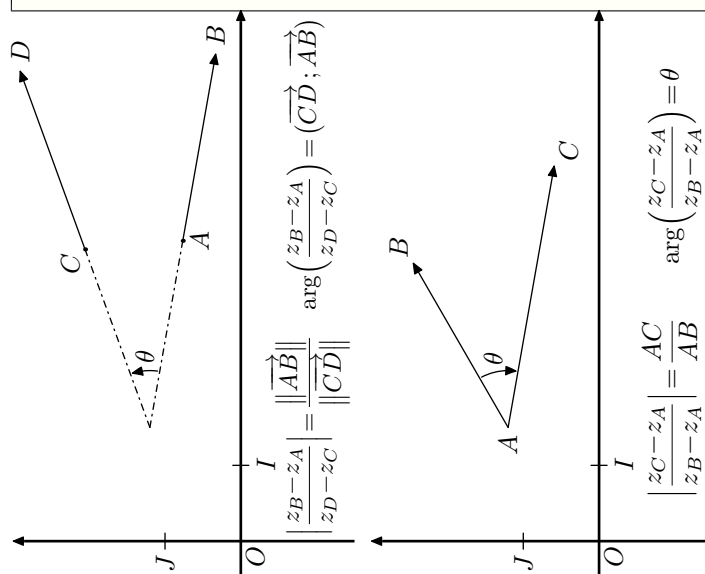
$$\widehat{DAB} = \frac{\pi}{3}$$

On en déduit que DAB est un triangle équilatéral

Quelques cas particulier

Soit A, B, C, D quatre points du plan ayant pour affixes respectifs z_A, z_B, z_C, z_D :

- Si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$ alors ABC est un triangle équilatéral.
- Si $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ alors ABC est un triangle isocèle en C
- Si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et si $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D} = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ alors $ABCD$ est un carré.
- Si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et si $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ alors $ABCD$ est un losange.
- Si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et si $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D} = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$ alors $ABCD$ est un rectangle.



F. Un peu plus loin:

Exemple:

Soit z un nombre complexe admettant l'écriture exponentielle $z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}}$.

On a :

$$z^{17} = (2 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}})^{17} = 2^{17} \cdot (e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}})^{17} = 2^{17} \cdot e^{17 \cdot i \cdot \frac{3\pi}{4}} = 2^{17} \cdot e^{i \cdot \frac{51\pi}{4}}$$

La mesure $\frac{51\pi}{4}$ n'est pas la mesure principale d'un angle. Or : $\frac{51\pi}{4} \simeq 12,75 \cdot \pi$. Ainsi, la mesure $\frac{51\pi}{4}$ représente le même angle que :

$$\frac{51\pi}{4} - 6 \cdot (2\pi) = \frac{51\pi}{4} - 12 \cdot \pi = \frac{51\pi - 48\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

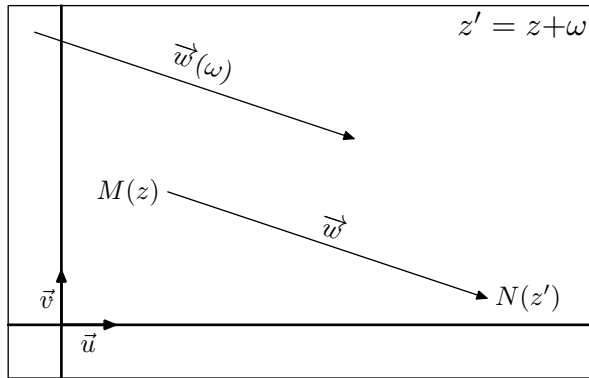
qui est la mesure principale de l'angle.

Proposition: (Translation)

Soit M et N deux points du plan d'axes respectives z et z' et $\vec{\omega}$ un vecteur d'axe ω .

Le point N est l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{\omega}$ si, et seulement si, on a :

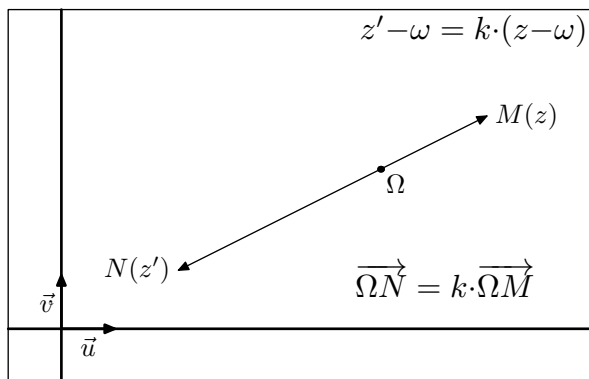
$$z' = z + \omega$$

**Proposition: (Homothétie)**

Soit M , N et Ω trois points du plan d'axes respectives z , z' et ω ; soit k un réel non nul.

M' est l'image du point M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k si, et seulement si, on a l'égalité :

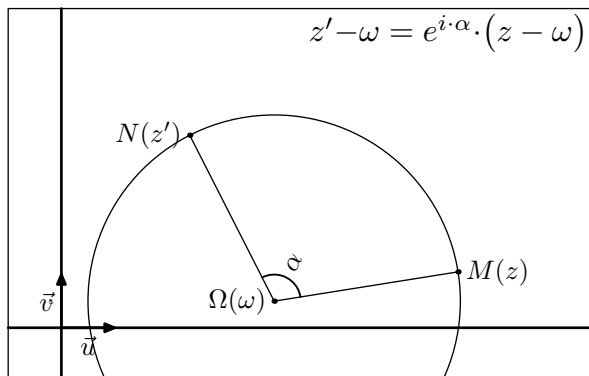
$$z' - \omega = k \cdot (z - \omega)$$

**Proposition: (Rotation)**

Soit M , N et Ω trois points du plan d'axes respectives z , z' et ω ; soit α un nombre réel.

M' est l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle α si, et seulement si, on a l'égalité :

$$z' - \omega = e^{i\alpha} \cdot (z - \omega)$$

**Preuve:**

- Supposons que le point N est le symétrique du point M par la rotation de centre Ω et d'angle α ; le point N est caractérisé par les propriétés suivantes :

$$\Omega N = \Omega M \quad ; \quad (\vec{\Omega M} ; \vec{\Omega N}) = \alpha$$

En traduisant ces égalités, sur les affixes des points M , N et Ω , on a :

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases}$$

Ainsi, le nombre complexe $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et pour argument α ; sa forme trigonométrique est :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = 1 \cdot e^{i\alpha} = e^{i\alpha} \Rightarrow z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega)$$

- Réciproquement, supposons que les affixes des points M , N et Ω vérifient la relation :

$$z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega)$$

En prenant le module de cette égalité, on a :

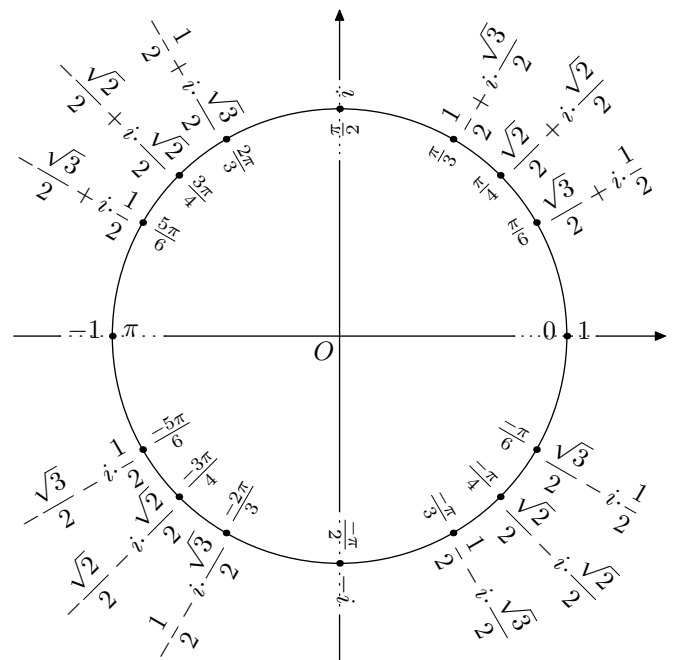
$$|z' - \omega| = |e^{i\alpha} (z - \omega)| \Rightarrow |z' - \omega| = |e^{i\alpha}| \cdot |z - \omega|$$

$$\Rightarrow |z' - \omega| = |z - \omega| \Rightarrow \Omega M' = \Omega M$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha} \Rightarrow \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \alpha$$

$$\Rightarrow (\vec{\Omega M} ; \vec{\Omega M'}) = \alpha$$

G. Cercle trigonométrique et affixe:**Remarque:**

Tout point du cercle trigonométrique admet pour affixe : $\cos \theta + i \sin \theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$

Pour tout point du plan M et pour z son affixe, le complexe $\frac{z}{|z|}$ est l'axe d'un point du cercle trigonométrique :

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

Ainsi, il existe un réel θ tel que :

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\Rightarrow z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Remarque :

Pour déterminer l'argument d'un nombre complexe z , on s'intéresse au nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ qui a la même argument et qui appartient au cercle trigonométrique.

Deux cas de figure :

- Le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ est un des 16 affixes associés aux angles remarquables de la figure ci-dessus.
- Ce n'est pas le cas. Prenons le cas du nombre complexe $z=0,6-0,8\cdot i$ dont l'image appartient au cercle trigonométrique ($|z|=1$).

$\cos \theta = 0,6$	$\sin \theta = -0,8$
$\theta = \cos^{-1}(0,6)$	$\theta = \sin^{-1}(-0,8)$
$\theta \simeq 0,927$	$\theta \simeq -0,927$
$\mathcal{S} = \{0,927; -0,927\}$	$\mathcal{S} = \{-0,927; -\pi+0,927\}$
	$\mathcal{S} = \{-0,927; -2,214\}$
On a : $z \simeq \cos(-0,927) + i \cdot \sin(-0,927)$	