Proposition :

La fonction ln est dérivable et pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\big(\ln\big)'(x)=\frac{1}{x}$$

Preuve :

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Déterminons l'existence et la valeur du nombre dérivée de la fonction ln en a.

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h}=\frac{\ln\Big(\dfrac{a+h}{a}\Big)}{h}=\frac{\ln\Big(1+\dfrac{h}{a}\Big)}{h}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\Big(1+\dfrac{h}{a}\Big)}{\dfrac{h}{a}}$$

Or, pour $a\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{h}{a}$ qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi, on peut identifier les deux limites suivantes :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\Big(1+\dfrac{h}{x}\Big)}{\dfrac{h}{x}}=\lim_{X\mapsto 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\big(1+X\big)}{X}$$

$$=\lim_{X\mapsto 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\big(1+X\big)-\ln 1}{X}$$

En utilisant la dérivabilité de ln en 1, on a :

$$=\frac{1}{a}\cdot\big(\ln\big)'(1)=\frac{1}{a}$$

Corollaire :

On a les propriétés suivantes :

- Soit u une fonction strictement positve et dérivable sur un intervalle I, on a :
  $$\big(\ln\circ u\big)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$
- La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a les deux équivalences suivantes :
  $$\ln x>0 \iff x\in\big[1\,;+\infty\big[$$
  $$\ln x<0 \iff x\in\big]0\,;1\big[$$
- Pour tous réels a et b strictement positif, on a :
  $$a<b \iff \ln a<\ln b$$

Proposition :

La fonction ln est dérivable et pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\big(\ln\big)'(x)=\frac{1}{x}$$

Preuve :

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Déterminons l'existence et la valeur du nombre dérivée de la fonction ln en a.

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h}=\frac{\ln\Big(\dfrac{a+h}{a}\Big)}{h}=\frac{\ln\Big(1+\dfrac{h}{a}\Big)}{h}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\Big(1+\dfrac{h}{a}\Big)}{\dfrac{h}{a}}$$

Or, pour $a\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{h}{a}$ qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi, on peut identifier les deux limites suivantes :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\Big(1+\dfrac{h}{x}\Big)}{\dfrac{h}{x}}=\lim_{X\mapsto 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\big(1+X\big)}{X}$$

$$=\lim_{X\mapsto 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\big(1+X\big)-\ln 1}{X}$$

En utilisant la dérivabilité de ln en 1, on a :

$$=\frac{1}{a}\cdot\big(\ln\big)'(1)=\frac{1}{a}$$

Corollaire :

On a les propriétés suivantes :

- Soit u une fonction strictement positve et dérivable sur un intervalle I, on a :
  $$\big(\ln\circ u\big)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$
- La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a les deux équivalences suivantes :
  $$\ln x>0 \iff x\in\big[1\,;+\infty\big[$$
  $$\ln x<0 \iff x\in\big]0\,;1\big[$$
- Pour tous réels a et b strictement positif, on a :
  $$a<b \iff \ln a<\ln b$$

Proposition :

La fonction ln est dérivable et pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\big(\ln\big)'(x)=\frac{1}{x}$$

Preuve :

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Déterminons l'existence et la valeur du nombre dérivée de la fonction ln en a.

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h}=\frac{\ln\Big(\dfrac{a+h}{a}\Big)}{h}=\frac{\ln\Big(1+\dfrac{h}{a}\Big)}{h}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\Big(1+\dfrac{h}{a}\Big)}{\dfrac{h}{a}}$$

Or, pour $a\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{h}{a}$ qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi, on peut identifier les deux limites suivantes :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\Big(1+\dfrac{h}{x}\Big)}{\dfrac{h}{x}}=\lim_{X\mapsto 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\big(1+X\big)}{X}$$

$$=\lim_{X\mapsto 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln\big(1+X\big)-\ln 1}{X}$$

En utilisant la dérivabilité de ln en 1, on a :

$$=\frac{1}{a}\cdot\big(\ln\big)'(1)=\frac{1}{a}$$

Corollaire :

On a les propriétés suivantes :

- Soit u une fonction strictement positve et dérivable sur un intervalle I, on a :
  $$\big(\ln\circ u\big)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$
- La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a les deux équivalences suivantes :
  $$\ln x>0 \iff x\in\big[1\,;+\infty\big[$$
  $$\ln x<0 \iff x\in\big]0\,;1\big[$$
- Pour tous réels a et b strictement positif, on a :
  $$a<b \iff \ln a<\ln b$$