Proposition :

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs :

1. $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$
2. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
3. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
4. Pour tout entier relatif n, on a : $\ln\left(x^n\right) = n\cdot \ln x$
5. $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot \ln x$

Preuve :

1. En utilisant la définition de la fonction logarithme, on a les deux égalités suivantes :
$$e^{\ln(x\cdot y)} = x\cdot y \quad ; \quad e^{\ln x+\ln y} = e^{\ln x}\cdot e^{\ln y} = x\cdot y$$
On vient de montrer que les deux nombres $\ln(x\cdot y)$ et $\ln x + \ln y$ ont la même image par la fonction exponentielle. Or, la fonction expontielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiares, la fonction exponentielle vérifie la relation suivante :
$$e^a = e^b \quad \Longrightarrow \quad a = b$$
On en déduit l'égalité : $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$

2. En utilisant la relation précédemment démontrée et la relation :
$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\cdot x &= 1 \\ \ln\left(\frac{1}{x}\cdot x\right) &= \ln 1 \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x &= 0 \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln x \end{aligned}$$

3. Utilisons les deux dernières propriétés avec l'égalité :
$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= x\cdot\frac{1}{y} \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) \end{aligned}$$
Utilisons les propriétés précédentes :
$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \ln(x) + \left(-\ln y\right) \\ &= \ln(x) - \ln y \end{aligned}$$

4. Montrons que les nombres $\ln\left(x^n\right)$ et $n\cdot\ln(x)$ ont même image par la fonction exponentielle :
$$e^{\ln\left(x^n\right)} = x^n \quad ; \quad e^{n\cdot\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^n = x^n$$
En utilisant la propriété suivante de la fonction exponentielle :
$$e^a = e^b \quad \Longrightarrow \quad a = b$$
Car ils ont la même image par la fonction exponentielle, on en déduit que les deux nombres $\ln\left(x^n\right)$ et $n\cdot\ln(x)$ sont égaux.

5. Puisque $x\in\mathbb{R}_+^*$, utilisons l'égalité : $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$:
$$\begin{aligned} \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} &= x \\ \ln\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right) &= \ln x \\ \ln\left(\sqrt{x}\right)\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right) &= \ln x \\ 2\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right) &= \ln x \\ \ln\left(\sqrt{x}\right) &= \frac{1}{2}\cdot\ln x \end{aligned}$$

Proposition :

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs :

1. $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$
2. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
3. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
4. Pour tout entier relatif n, on a : $\ln\left(x^n\right) = n\cdot \ln x$
5. $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot \ln x$

Preuve :

1. En utilisant la définition de la fonction logarithme, on a les deux égalités suivantes :
$$e^{\ln(x\cdot y)} = x\cdot y \quad ; \quad e^{\ln x+\ln y} = e^{\ln x}\cdot e^{\ln y} = x\cdot y$$
On vient de montrer que les deux nombres $\ln(x\cdot y)$ et $\ln x + \ln y$ ont la même image par la fonction exponentielle. Or, la fonction expontielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiares, la fonction exponentielle vérifie la relation suivante :
$$e^a = e^b \quad \Longrightarrow \quad a = b$$
On en déduit l'égalité : $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$

2. En utilisant la relation précédemment démontrée et la relation :
$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\cdot x &= 1 \\ \ln\left(\frac{1}{x}\cdot x\right) &= \ln 1 \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x &= 0 \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln x \end{aligned}$$

3. Utilisons les deux dernières propriétés avec l'égalité :
$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= x\cdot\frac{1}{y} \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) \end{aligned}$$
Utilisons les propriétés précédentes :
$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \ln(x) + \left(-\ln y\right) \\ &= \ln(x) - \ln y \end{aligned}$$

4. Montrons que les nombres $\ln\left(x^n\right)$ et $n\cdot\ln(x)$ ont même image par la fonction exponentielle :
$$e^{\ln\left(x^n\right)} = x^n \quad ; \quad e^{n\cdot\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^n = x^n$$
En utilisant la propriété suivante de la fonction exponentielle :
$$e^a = e^b \quad \Longrightarrow \quad a = b$$
Car ils ont la même image par la fonction exponentielle, on en déduit que les deux nombres $\ln\left(x^n\right)$ et $n\cdot\ln(x)$ sont égaux.

5. Puisque $x\in\mathbb{R}_+^*$, utilisons l'égalité : $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$:
$$\begin{aligned} \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} &= x \\ \ln\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right) &= \ln x \\ \ln\left(\sqrt{x}\right)\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right) &= \ln x \\ 2\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right) &= \ln x \\ \ln\left(\sqrt{x}\right) &= \frac{1}{2}\cdot\ln x \end{aligned}$$

