Etude de la courbe de la fonction exponentielle

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction exponentielle sur les deux intervalles $\left[-3\,;0\right]$ et $\left[-1\,;3\right]$ est donnée en annexe.

A - Etude graphique :

Exercice 1

1. Par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs suivant au dixième près :

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$\exp(x)$								

(laisser apparent vos traits de construction.)

2. a. Tracer sur le graphique les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses suivants :
   $-1 \quad ; \quad 0 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad \frac{3}{2}$

   b. En déduire, au dixième près, la valeur des nombres dérivées suivants :

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$
$(\exp)'(x)$				

3. Conjecturer une première propriété vérifiée par cette courbe ?

B - Recherche de conjectures :

Exercice 2

Pour compléter les tableaux suivants, on utilisera les valeurs obtenues dans l'exercice **1** question 1.. On complétera les tableaux au centième près.

1. a. Compléter le tableau ci-dessous :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$\dfrac{1}{\exp(x)}$				

   b. Ces résultats vous emmènent-ils à faire une conjecture ? Si oui, laquelle ?

2. a. Compléter le tableau :

	Valeur approchée au dixième près	Valeur identifiée avec
$\exp\,(0)\cdot\exp\,(1)$		
$\exp\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\exp\,(1)$		
$\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\exp\left(\frac{3}{2}\right)$		
$\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\exp\,(1)$		

   b. Pour x et y deux nombres réels, établir une conjecture sur la valeur de l'expression :
   $\exp(x)\cdot\exp(y)$

C - Démonstration de propriétés

On utilisera seulement les propriétés caractérisant la fonction exponentielle : $f(0)=1 \quad ; \quad f'=f$

Exercice 3

1. Soit a un nombre réel quelconque ; on définit la fonction φ définit pour tout $x\in\mathbb{R}$ par la relation :
   $$\varphi(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x)}$$
   a. Déterminer l'image de 0 par la fonction φ.

   b. Etablir que, pour tout nombre réel x, on a : $\varphi'(x) = 0$.

   c. Pour tout nombre réel x, en déduire : $\exp(x)\cdot\exp(a) = \exp(x+a)$

2. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\psi(x) = \exp(x)\cdot\exp(-x)$

   a. Déterminer l'expression de la fonction ψ' dérivée de la fonction ψ.

   b. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a la relation : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

3. Soit n un nombre entier naturel et x un nombre réel. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout nombre entier naturel n :
   $\exp(n\cdot x) = \exp(x)^n$

E - Utilisations des propriétés :

Exercice 4

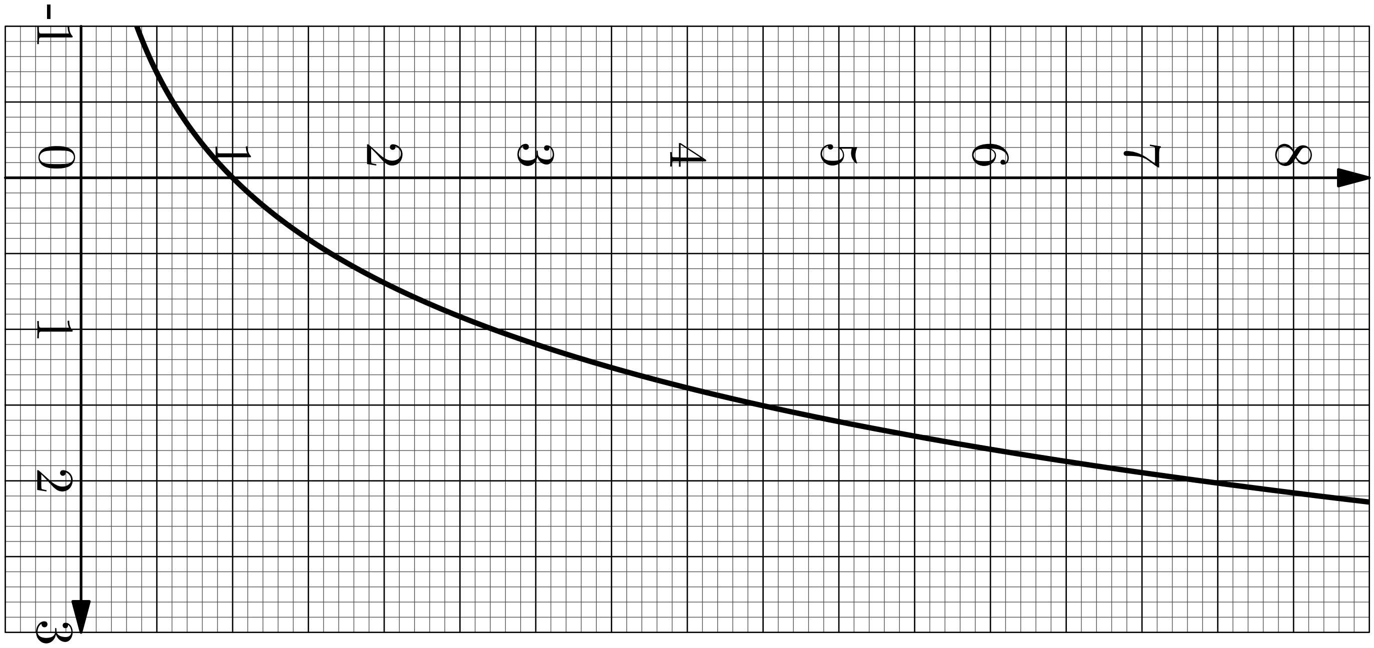
Utiliser les propriétés précédemment établies pour simplifier les expressions suivantes :

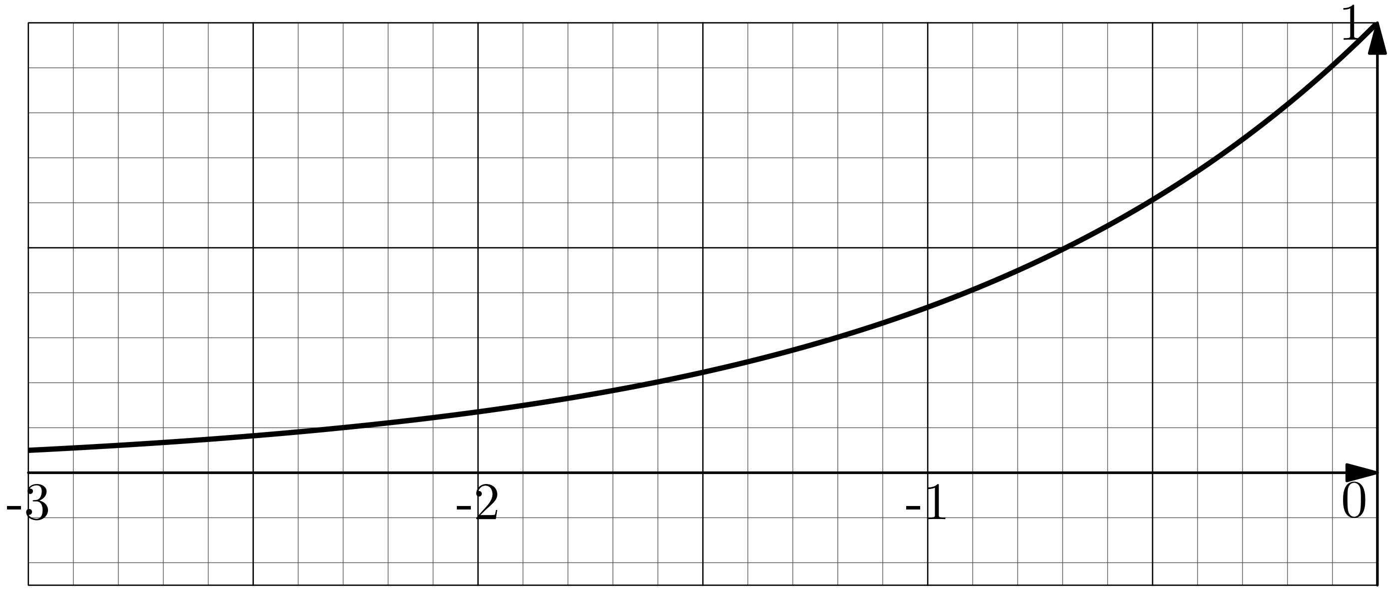
a. $\exp(2)\cdot\exp(3)$

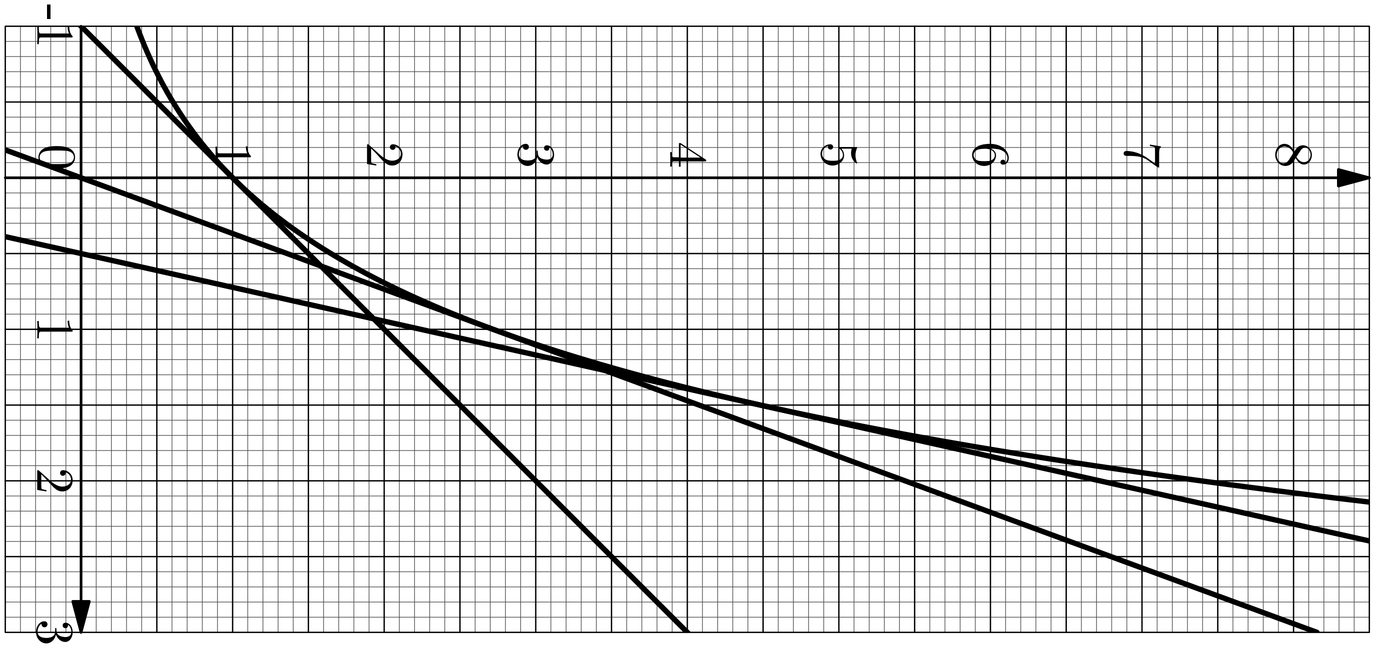
b. $\dfrac{\exp(8)}{\exp(2)}$

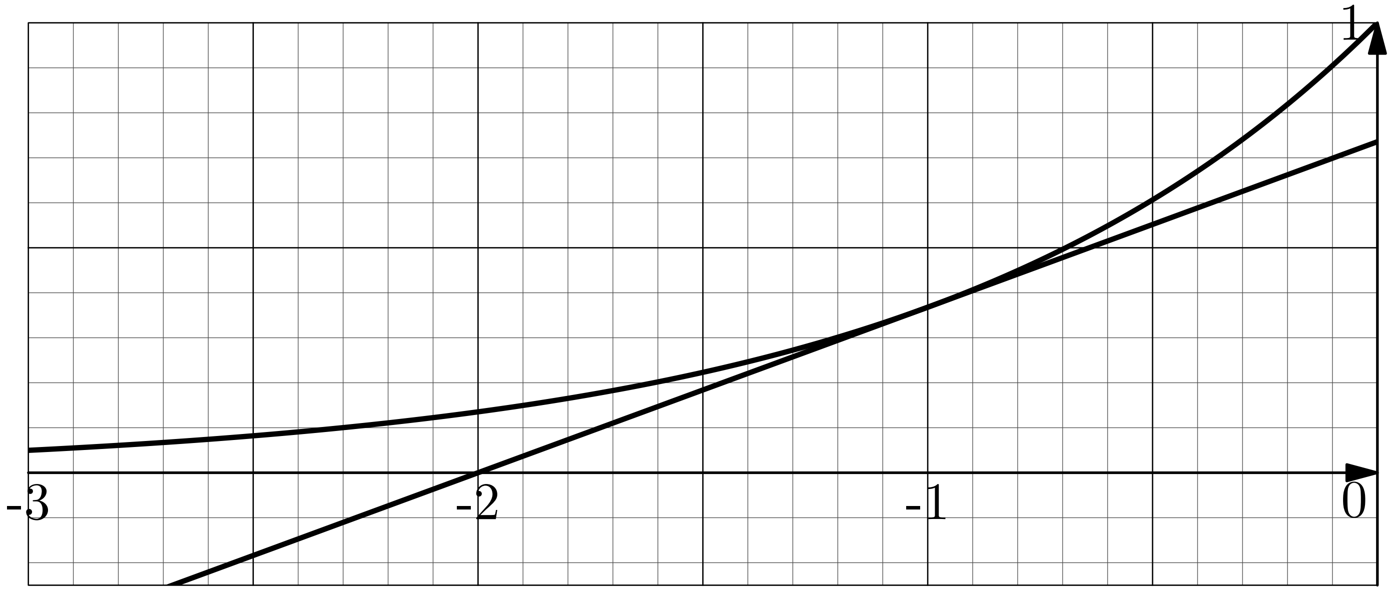
c. $\exp(3x+1)\cdot\exp(2-x)$

d. $\dfrac{\exp(x-1)}{\exp(x+1)}$


-1
0
1
2
3
1
2
3
4
5
6
7
8


1
-3
-2
-1
0


-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
1
2
3


1
-3
-2
-1
0

