Question 1. a.

L'image de 0 par la fonction φ a pour valeur :

$$\varphi(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(0)} = \frac{\exp(a)}{1} = \exp y$$

Question 1. b.

La fonction φ est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies par :

$$u(x) = \exp(x+a) \quad ; \quad v(x) = \exp(x)$$

Question 1. b.

La fonction φ est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies par :

$$u(x) = \exp(x + a) \quad ; \quad v(x) = \exp(x)$$

Le nombre a étant constant, ces deux fonctions admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 1 \times \exp'(x + a) \qquad \Bigg| \qquad v'(x) = 1 \times \exp'(x)$$

Question 1. b.

La fonction φ est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies par :

$$u(x) = \exp(x+a) \quad ; \quad v(x) = \exp(x)$$

Le nombre a étant constant, ces deux fonctions admettent pour dérivées :

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 \times \exp'(x+a) \\ &= \exp(x+a) \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} v'(x) &= 1 \times \exp'(x) \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

Question 1. b.

La formule de dérivation d'un quotient donne l'expression de la fonction φ' dérivée de la fonction φ :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}\\ &= \frac{\exp(x+a)\cdot\exp(x) - \exp(x+a)\cdot\exp(x)}{\big[\exp(x)\big]^2}\\ &= \frac{0}{\big[\exp(x)\big]^2} = 0\end{aligned}$$

Question 1. c.

La fonction φ a une **dérivée nulle**, on en déduit que φ est une **fonction constante** sur $\mathbb{R}$.

Question 1. c.

La fonction φ a une **dérivée nulle**, on en déduit que φ est une **fonction constante** sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(0)$$

$$\frac{\exp(x+a)}{\exp(x)} = \exp(a)$$

D'après le produit en croix, on a :

$$\exp(x+a) = \exp(x) \cdot \exp(a)$$

Question 2. a.

La fonction ψ est définie par le produit de u et v où :

$$u(x) = \exp(x) \quad ; \quad v(x) = \exp(-x)$$

Question 2. a.

La fonction ψ est définie par le produit de u et v où :

$$u(x) = \exp(x) \quad ; \quad v(x) = \exp(-x)$$

Ces deux fonctions admettent pour dérivée :

$$\begin{array}{l|l} u'(x) = 1\times \exp'(x) & v'(x) = -1\times \exp'(-x) \\ = \exp(x) & = -\exp(-x) \end{array}$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction ψ' dérivée de la fonction ψ :

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= \exp(x)\cdot \exp(x) + \exp(x)\cdot\big[-\exp(x)\big] \\ &= \big[\exp(x)\big]^2 - \big[\exp(x)\big]^2 = 0 \end{aligned}$$

Question 2. a.

ψ' étant **nulle** pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que la fonction ψ est constante sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on a :

$$\psi(x) = \psi(0)$$
$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) \cdot \exp(0)$$
$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$$

$\exp(x)$ étant un nombre réel non-nul :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Question 3.

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{“} \exp(n{\cdot}x) = \exp(x)^n \text{”}$$

Question 3.

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{“} \exp(n \cdot x) = \exp(x)^n \text{”}$$

Initialisation : $\exp(0 \cdot x) = \exp(0) = 1 \quad ; \quad \exp(x)^0 = 1$

La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Question 3.

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{“}\exp(n{\cdot}x) = \exp(x)^n\text{''}$$

Initialisation : $\exp(0{\cdot}x) = \exp(0) = 1 \quad ; \quad \exp(x)^0 = 1$

La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie : $\exp(n{\cdot}x) = \big[\exp(x)\big]^n$.

$$\exp\big[(n+1){\cdot}x\big] = \exp(x){\cdot}\exp(n{\cdot}x)$$

$$= \exp(x){\cdot}\exp(x)^n = \exp(x)^{n+1}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion :

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie.