L'énoncé de l'exercice affirme deux certitudes : l'existence du couple $(q\,;r)$ et son unicité ; notre démonstration reprend séparemment ces deux points :

- **Existence :**
  Effectuons un raisonnement par dijonction de cas :

  - Supposon que $a\in\mathbb{N}$; considérons l'ensemble A défini par :
    $A=\big\{n\in\mathbb{N}\;\big|\;n\cdot b>a\big\}$
    L'ensemble $\mathbb{N}$ est archimédien ce qui nous assure que A est non vide ; or, nous savons que toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
    Notons n_0 le plus petit élément l'ensemble A ; puisque n_0 est le plus petit élément de A, cela signifie que son prédécesseur n'y appartient pas :
    $(n_0-1)\notin A \implies n_0\cdot b\leqslant a$
    Les propriétés de n_0 et de (n_0-1) permetttent d'écrire :
    $$\left.\begin{array}{l}(n_0-1)\notin A\\ n_0\in A\end{array}\right\}\implies (n_0-1)\cdot b\leqslant a<n_0\cdot b$$
    Ainsi, on a les encadrements suivants :
    $$(n_0-1)\cdot b\leqslant a<n_0\cdot b$$
    $$(n_0-1)\cdot b-(n_0-1)\cdot b\leqslant a-(n_0-1)\cdot b< n_0\cdot b-(n_0-1)\cdot b$$
    $$0\leqslant a-(n_0-1)\cdot b<b$$
    Posons : $r=a-(n_0-1)\cdot b$
    $$0\leqslant r<b$$
    Posons maintenant $q=(n_0-1)$, on a :
    $$q\cdot b+r=(n_0-1)\cdot b+\big[a-(n_0-1)\cdot b\big]$$
    $$=a$$
    Ainsi le couple $\big(n_0-1\,;a-(n_0-1)\cdot b\big)$ est une solution à notre théorème.

  - Supposons maintenant que a est strictement négatif :
    Ainsi, $-a$ est positif ; d'après le travail effectué précédemment, on a l'existente d'un couple $(q\,;r)$ tel que :
    $(-a)=q\cdot b+r$ où $0\leqslant r<b$
    Ainsi, on obtient l'égalité :
    $a=(-q)\cdot b+(-r)$ où $-b<-r\leqslant 0$
    Raisonnons de nouveau par disjonction de cas :
    - si $r=0$, alors le couple $(-q\,;0)$ est une solution.
    - Supposons que $r>0$, ainsi, on a l'encadrement :
      $-b<-r<0$
      Modifions l'égalité précédente :
      $$a=(-q)\cdot b+(-r)$$
      $$a=\big[(-q)\cdot b-b\big]+\big[(-r)+b\big]$$
      $$a=(-q-1)\cdot b+(b-r)$$
      Effectuons un encadrement de $(b-r)$:
      $$-b<-r<0$$
      $$-b+b<b-r<b$$
      $$0<b-r<b$$
      Ainsi, le couple $(-b-1\,;b-r)$ est une solution de notre problème :
      $a=(-b-1)\cdot q+(b-r)$ où $0\leqslant b-r<b$.

  On vient donc de montrer l'existence d'un tel couple

- **Unicité :**
  Pour montrer l'unicité, supposons l'existence de deux couples $(q_1\,;n_1)$ et $(q_2\,;n_2)$ vérifiant conjointement les propriétés citées :
  $$\left\{\begin{array}{l}a=q_1\cdot b+r_1\\0\leqslant r_1<b\end{array}\right.\;;\;\left\{\begin{array}{l}a=q_2\cdot b+r_2\\0\leqslant r_2<b\end{array}\right.$$
  Etudions de deux manières la différence (r_1-r_2) :

  - On a : $0\leqslant r_1<b$; $0\leqslant r_2<b$
    On en déduit : $-b<-r_2\leqslant 0$
    En additionnant ces deux encadrements, on obtient :
    $$0+(-b)<r_1+(-r_2)<b+0$$
    $$-b<r_1-r_2<b$$
  - On a les égalités suivantes :
    $r_1=a-q_1\cdot b$; $r_2=a-q_2\cdot b$
    On en déduit :
    $$r_1-r_2=(a-q_1\cdot b)-(a-q_2\cdot b)$$
    $$=a-q_1\cdot b-a+q_2\cdot b$$
    $$=-q_1\cdot b+q_2\cdot b$$
    $$=(q_2-q_1)\cdot b$$
    Ainsi, le nombre (r_1-r_2) est un multiple de b.

  Or, le seul multiple de b compris dans l'intervalle $\big]-b\,;b\big[$ est 0 ; ainsi, on en déduit :
  $r_1-r_2=0 \implies r_1=r_2$

  Des égalités : $a=q_1\cdot b+r_1$; $a=q_2\cdot b+r_2$
  On en déduit l'égalité suivante :
  $$q_1\cdot b+r_1=q_2\cdot b+r_2$$
  $$q_1\cdot b=q_2\cdot b+(r_2-r_1)$$
  $$q_1\cdot b=q_2\cdot b$$
  $$q_1=q_2$$
  Les deux couples sont donc égaux : ceci montre l'unicité de la solution.