Proposition :

La fonction $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Raisonnons par l'absurde pour montrer cette assertion. Pour cela supposons :

> "*La fonction* $\exp$ *n'est pas strictement positive sur* $\mathbb{R}$. *C'est à dire qu'il existe au moins un nombre réel* a *tel que* $\exp(a) \leqslant 0$"

Ainsi, a est un nombre réel vérifiant $\exp(a) \leqslant 0$. Sachant que la fonction $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a déduit que le nombre a vérifie :

$$\exp(a) < 0$$

On en déduit que $0 \in \big[\exp(a)\,;1\big]$. Puisque :

- $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle continue sur $\mathbb{R}$;
- $\exp(0) = 1$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un nombre b telle que :

$$\exp(b) = 0$$

On aboutit à une contradiction car la fonction $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Corollaire :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

La fonction exponentielle est strictement positive. Par définition, la fonction exponentielle vérifie la propriété $f' = f$. Ainsi, la fonction exponentielle admet une dérivée *(elle-même)* strictement positive, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante.

Proposition :

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet le tableau de vaiation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de exp	0	1	$+\infty$

Preuve :

La fonction exponentielle est strictement croissance sur $\mathbb{R}$.

Les limites aux bornes de l'ensemble $\mathbb{R}$ de définition de la fonction exponentielle sont démontrées dans le document :

r651-0