# Dichotomie

Dans toute l'activité, on considère la fonction $f$ définie par : $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^4-x$

## Exercice 1

1. Ouvrez le classeur Excel "dichotomie.xls" et sélectionner la feuille "*tableauValeurs*"

2. a. Quelle courbe est représentée à l'écran ?

   b. Quelles données de cette feuille peut confirmer votre observation.

   c. Modifier les deux premières valeurs de la colonne des "$x$" en 2 et 1,8 ; étender ces valeurs sur l'ensemble de la colonne pour obtenir une suite de nombres ayant un pas de 0,2

3. a. Modifier cette feuille de calcul pour qu'elle représente la courbe de la fonction $f$.

   b. Combien de fois cette fonction semble s'annuler sur $\mathbb{R}$. Modifier les paramètres d'affichage pour affiner votre réponse.

## Exercice 2

On admet l'existence d'un zéro $\alpha$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $\big[1\,;2\big]$

On pose : $a_0=1$ ; $b_0=2$

1. a. Le nombre $\frac{3}{2}$ est le centre de l'intervalle $\big[1\,;2\big]$. Donner l'image de $\frac{3}{2}$ par la fonction $f$.

   b. Dans lequel des deux intervalles suivants, le nombre $\alpha$ appartient-il ?
   $\Big[1\,;\frac{3}{2}\Big]$ ; $\Big[\frac{3}{2}\,;2\Big]$

   On pose : $a_1=1$ ; $b_1=\frac{3}{2}$

2. De même, dire à quel intervalle appartient $\alpha$ :
   $\Big[1\,;\frac{5}{4}\Big]$ ou $\Big[\frac{5}{4}\,;\frac{3}{2}\Big]$

## Exercice 3

On définit les trois suites $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(c_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} a_0=1 & \\ a_{n+1}=a_n & \text{Si } f(c_n)>0 \\ a_{n+1}=c_n & \text{Si } f(c_n)<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0=2 & \\ b_{n+1}=b_n & \text{Si } f(c_n)<0 \\ b_{n+1}=c_n & \text{Si } f(c_n)>0 \end{cases} \quad ; \quad c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$$

1. Dans le même classeur Excel, ouvrez la feuille "approcheDichotomie".

2. a. Pour la ligne $n=0$, compléter les valeurs de $a_n$ et $b_n$ correspondante ; remarquer que les valeurs de $c_n$ et $f(c_n)$ se complètent automatiquement. Saisisser, dans les cases correspondantes, les formules pour que les valeurs $f(a_n)$ et $f(b_n)$ se complétent automatiquement.

   b. Justifier que ces suites ont pour valeurs au rang $n=1$ :
   $a_1=1$ ; $b_1=1{,}5$ ; $c_1=1{,}25$

3. a. Saisissez dans la case correspondant à $b_1$ la formule suivante : `=SI(F3>0;C3;D3)`

   b. Quel valeur est alors donnée par Excel pour la valeur $b_1$ ? Justifier que la formule rentrée correspond à la définition de la suite $(b_n)$.

   c. Rentrer dans la case correspondand à $a_1$, une formule similaire vérifiant la définition de la suite $\big(a_n\big)$.

4. a. Etendre ces formules à l'ensemble des lignes du tableau.

   b. Vers quelle valeur semble converger les suites $\big(a_n\big)$ et $\big(b_n\big)$ ?

## Exercice 4

Reprenons l'étude des suites défini dans l'exercice précédent.

1. Justifier que la suite $\big(a_n\big)$ est croissante ; justifier que la suite $\big(b_n\big)$ est décroissante.

2. Etablir l'inégalité suivante :
   $0\leqslant b_n-a_n\leqslant(b_0-a_0)\cdot\frac{1}{2^n}$

3. Justifier que les suites $\big(a_n\big)$ et $\big(b_n\big)$ sont des suites adjacentes.

4. a. Justifier que : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}f(b_n)=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}f(a_n)=0$

   b. En déduire la valeur de convergence des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

## Exercice 5

1. a. Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction $f$.

   b. En déduire le tableau de varition de la fonction $f$.

2. a. Justifier que la fonction $f$ admet deux zéros sur $\mathbb{R}$.

   b. Etablir l'existence d'un nombre $\alpha$ tel que :
   $f(\alpha)=0$ ; $1{,}2<\alpha<1{,}3$

 