Equation cartésienne

A. Rappels:

Proposition : *(sans l'usage du produit scalaire)*

Considérons deux droites (d) et (d') admettant respectivement pour équation réduite :

$y=a\cdot x+b \quad ; \quad y=a'\cdot x+b'$

- les deux droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, $a'=a$
- les droites (d) et (d') sont perpendiculaires si, et seulement si, $a'=-\dfrac{1}{a}$

Preuve :

rq603-0.pdf

Remarque :

Vous trouverez ci-dessous le cours de 2nd sur les équations cartésiennes de droites et les résolutions des systèmes d'équations r756-0

Définition :

Dans le plan, on considère une droite (d) et un vecteur $\overrightarrow{u}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur de la droite (d)** si la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la même de celle de la droite (d).

Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère une droite (d) admettant le vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a\,;b)$.
La droite (d) a pour équation cartésienne :

$-b\cdot x+a\cdot y+c=0 \qquad$ où $c\in\mathbb{R}$

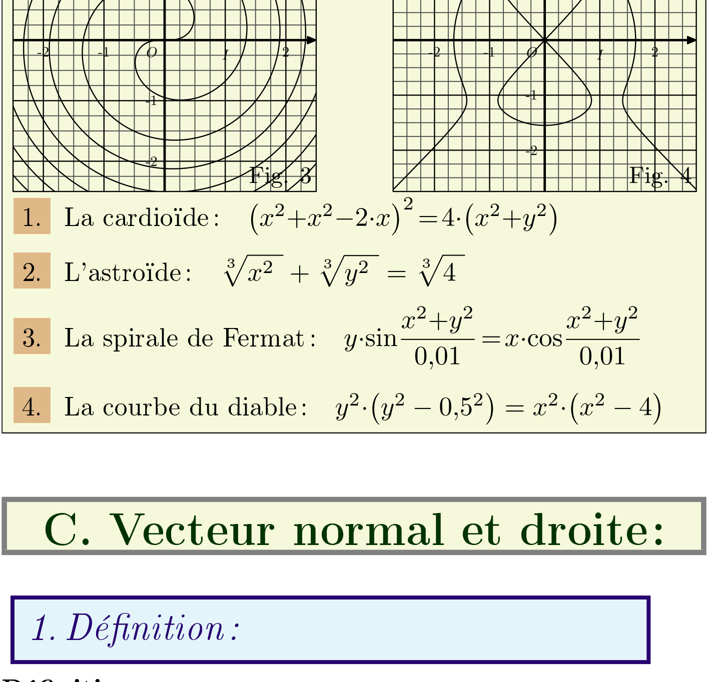
B. Introduction:

Remarque :

Soit (E) une équation à deux inconnues notées x et y.
Dans le plan muni d'un repère cartésien, par abus de langage, on dit qu'un point vérifie l'équation (E) si ses coordonnées la vérifient.

Définition :

On considère une courbe $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère cartésien et une équation (E) d'inconnues x et y.
On dit que cette équation est l'**équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$** lorsque l'ensemble de ses solutions est l'ensemble des coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}$.



1. La cardioïde : $\left(x^2+x^2-2\cdot x\right)^2=4\cdot\left(x^2+y^2\right)$
2. L'astroïde : $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{4}$
3. La spirale de Fermat : $y\cdot\sin\dfrac{x^2+y^2}{0{,}01}=x\cdot\cos\dfrac{x^2+y^2}{0{,}01}$
4. La courbe du diable : $y^2\cdot\left(y^2-0{,}5^2\right)=x^2\cdot\left(x^2-4\right)$

C. Vecteur normal et droite:

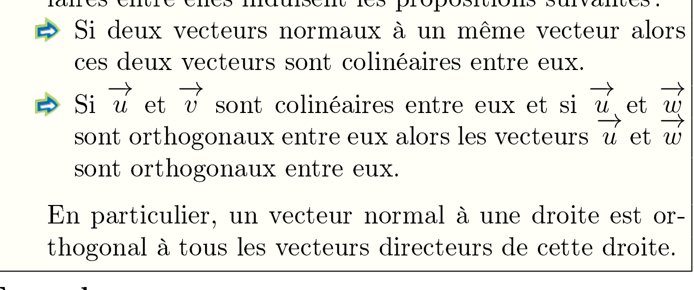
1. Définition :

Définition :

Soit (d) une droite admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{v}$ non-nul est un **vecteur normal à (d)** si les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.

Exemple :

Ci-dessous est représentée une droite (d) passant par le point A et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur.



Remarque :

- Le fait qu'un vecteur $\overrightarrow{v}$ soit normal à une droite (d) est indépendant du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ choisi.
- Les théorèmes sur les droites parallèles et perpendiculaires entre elles induisent les propositions suivantes :
  - Si deux vecteurs normaux à un même vecteur alors ces deux vecteurs sont colinéaires entre eux.
  - Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires entre eux et si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux entre eux alors les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux entre eux.

  En particulier, un vecteur normal à une droite est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de cette droite.

Exemple :

Exercice

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

1. On considère la droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{n}(-2\,;1)$ et passant par le point $A(4\,;1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
2. On considère la droite (d') admettant l'équation cartésienne :
$x-4\cdot y+3=0$
Donner un vecteur $\overrightarrow{v'}$ normal de (d'), un vecteur $\overrightarrow{u}$ directeur de (d') et un point B appartenant à (d').

correction : https://chingatome.fr/8552

2. Parallélisme et orthogonalité :

Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormé, on considère une droite (d) et a,b deux nombres réels.

- Si la droite (d) admet $a\cdot x+b\cdot y+c$, où $c\in\mathbb{R}$, pour équation cartésiene alors le vecteur $\overrightarrow{n}(a\,;b)$ est normal à la droite (d).
- Si le vecteur $\overrightarrow{n}(a\,;b)$ est normal à la droite (d) alors la droite (d) admet une équation cartésienne de la forme : $a\cdot x+b\cdot y+c=0 \quad$ où $c\in\mathbb{R}$.

Preuve :

r700-0

Proposition :

Dans le plan, on considère deux droitse (d) et (d') admettant respectivement les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ pour vecteurs normaux.

- Les droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.
- Les droites (d) et (d') sont perpendiculaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.

Preuve :

r720-0

Exemple :

Exercice

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :

1. On considère les deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour équation cartésienne :
$(d_1):\ x+2\cdot y-1=0 \quad ; \quad (d_2):\ 4\cdot x+8\cdot y+2=0$
Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
2. On considère les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) admettant pour équation cartésienne :
$(\Delta_1):\ 4\cdot x+3\cdot y-1=0 \quad ; \quad (\Delta_2):\ -6\cdot x+8\cdot y+5=0$
Justifier que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

correction : https://chingatome.fr/8449

3. Projeté orthogonal :

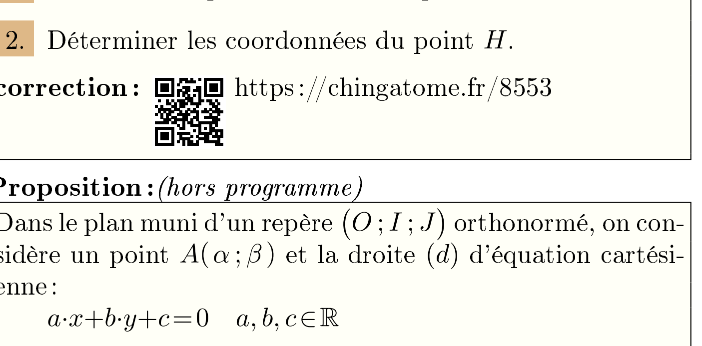
Définition : *(rappels)*

Dans le plan, on considère une droite (d) et un point M. On appelle **projeté du point M sur la droite (d)**, l'unique point intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à la droite (d) passant par le point M.

Exemple :

Exercice

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère le point $A(3\,;1)$ et la droite (d) représentée ci-dessous d'équation cartésienne : $\quad 2\cdot x+5\cdot y-2=0$



On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

1. Construire le point H dans le repère.
2. Déterminer les coordonnées du point H.

correction : https://chingatome.fr/8553

Proposition : *(hors programme)*

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère un point $A(\alpha\,;\beta)$ et la droite (d) d'équation cartésienne :

$a\cdot x+b\cdot y+c=0 \quad a,b,c\in\mathbb{R}$

Le point M projeté orthogonal du point A sur la droite (d) a pour coordonnées :

$M\left(\dfrac{b^2\cdot\alpha-a\cdot c-a\cdot b\cdot\beta}{a^2+b^2}\,;\dfrac{a^2\cdot\beta-b\cdot c-a\cdot b\cdot\alpha}{a^2+b^2}\right)$

Preuve :

r716-0

D. Cercle:

Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonomé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $O(x_O\,;y_O)$ et de rayon r.
L'ensemble des points $M(x\,;y)$ du cercle $\mathscr{C}$ vérifie l'équation cartésienne :

$x^2+y^2+\left(-2\cdot x_O\right)\cdot x+\left(-2\cdot y_O\right)\cdot y+\left({x_O}^2+{y_O}^2-r^2\right)=0$

Preuve :

r697-0

Exemple :

Exercice

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(2\,;1)$ et de rayon 4.

Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

correction : https://chingatome.fr/8554

Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ où $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.
L'ensemble des points $M(x\,;y)$ du cercle $\mathscr{C}$ vérifie l'équation cartésienne :

$x^2+y^2+\left(-x_A-x_B\right)\cdot x+\left(-y_A-y_B\right)\cdot y+\left(x_A\cdot x_B+y_A\cdot y_B\right)=0$

Preuve :

r697-1

Exemple :

Exercice

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et le cercle $\mathscr{C}$ dont les points $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;0)$ sont diamètralement opposés.

Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

correction : https://chingatome.fr/8555

Proposition :

Soit a, b, c trois nombres réels quelconques. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation cartésienne :

$$x^2+y^2+a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0$$

- Si $\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c<0$ alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est vide.
- Si $\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c=0$ alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est un point.
- Si $\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c>0$ alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle.

Preuve :

r697-2

Exemple :

Exercice

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les trois équations cartésiennes :

a. $x^2+y^2-10{\cdot}x+2{\cdot}y+22=0$

b. $x^2+y^2-2{\cdot}x-4{\cdot}y+5=0$

c. $x^2+y^2+2{\cdot}x+2{\cdot}y+5=0$

Déterminer la nature, et si besoin les éléments caractéristiques, de l'ensemble défini par chacune de ces équations cartésiennes.

correction : https://chingatome.fr/8556

E. Parabole:

Définition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la parabole est la représentation graphique d'une fonction du second degré.

Remarque :

Cette définition n'est pas complète mais est suffisante pour traiter le programme de la classe de $1re$. Vous trouverez une définition géométrique de la parabole en suivant le lien ci-dessous :

r757-0

Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère une parabole $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne :

$$y=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$$

La parabole $\mathcal{P}$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation cartésienne $x=-\dfrac{b}{2{\cdot}a}$

Preuve :

r758-0

Exemple :

Exercice

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $y=2{\cdot}x^2+x+3$

A tout point M de la parabole, différent du sommet de la parabole, on associe le point M' second point d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ avec la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point M.
Détermine les coordonnées du point M afin que $MM'=2$.

correction : https://chingatome.fr/8557

