

### Théorème :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $J$ . La fonction  $g \circ f$  est une fonction dérivable sur  $I$  et pour tout nombre réel  $a$ , on a l'égalité :

$$[g \circ f]'(a) = f'(a) \times g'[f(a)]$$

### Démonstration :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $J$ . On considère un nombre réel  $a \in I$  tel que :

$$f(a) = b \quad ; \quad b \in J.$$

On considère la fonction  $\varepsilon$  définie par :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) = \frac{g(x) - g(b)}{x - b} - g'(b) & \text{pour } x \neq b \\ \varepsilon(x) = 0 & \text{pour } x = b \end{cases}$$

On effectue les deux remarques préliminaires :

- On a la limite suivante :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \varepsilon(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \left[ \frac{g(x) - g(b)}{x - b} - g'(b) \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \left[ \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \right] - g'(b)$$

La fonction  $g$  est dérivable en  $b$  :

$$= g'(b) - g'(b) = 0$$

De même, on obtiendra la limite :  $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \varepsilon(x) = 0$

Ainsi, on obtient les égalités :  $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \varepsilon(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \varepsilon(x) = \varepsilon(b)$

On en déduit que la fonction  $\varepsilon$  est continue en 0.

La fonction  $f$  étant dérivable en  $a$ , on en déduit que la fonction composée  $\varepsilon \circ f$  est continue en  $a$ . On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} (\varepsilon \circ f)(x) = \varepsilon[f(a)] = \varepsilon(b) = 0$$

- Etudions une expression de  $g(x) - g(b)$  par la disjonction de cas suivante sur la valeur de  $x$  :

$$\Rightarrow \text{Si } x \in J \text{ et } x \neq b : \quad \varepsilon(x) = \frac{g(x) - g(b)}{x - b} - g'(b) \implies g(x) - g(b) = [\varepsilon(x) + g'(b)] \cdot (x - b)$$

$\Rightarrow$  Si  $x = b$  :

$$\color{red}{\otimes} \quad g(x) - g(b) = g(b) - g(b) = 0$$

$$\color{red}{\otimes} \quad [\varepsilon(x) + g'(b)] \cdot (x - b) = [\varepsilon(b) + g'(b)] \cdot (b - b) = [0 + g'(b)] \times 0 = 0$$

Ainsi, on en déduit que pour tout nombre réel  $x \in J$ , on a :

$$g(x) - g(b) = [\varepsilon(x) + g'(b)] \cdot (x - b)$$

En particulier, on pourra utiliser l'égalité suivante pour tout  $x \in I$  :

$$g[f(x)] - g(b) = [\varepsilon[f(x)] + g'(b)] \cdot [f(x) - b]$$

Etudions le quotient suivant :

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} &= \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{x - a} = \frac{g[f(x)] - g(b)}{x - a} = \frac{[\varepsilon[f(x)] + g'(b)] \cdot [f(x) - b]}{x - a} \\ &= [\varepsilon[f(x)] + g'(b)] \cdot \frac{f(x) - b}{x - a} = [\varepsilon[f(x)] + g'(b)] \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

On a les deux limites suivantes :

- La fonction  $\varepsilon \circ f$  est continue en  $a$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} [\varepsilon[f(x)] + g'(b)] = \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon[f(x)] + g'(b) = 0 + g'(b) = g'(b) = g'[f(a)]$$

- La fonction  $f$  étant dérivable en  $a$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} [\varepsilon[f(x)] + g'(b)] \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'[f(a)] \times f'(a)$$

**Preuve :** (avec le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable)

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et  $g$  une fonction dérivable en  $f(x)$ . Montrons que le nombre dérivée de la fonction  $(g \circ f)$  en  $a$  a pour valeur :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'[f(a)]$$

● **Utilisation de la dérivabilité de  $f$  et de  $g$  :**

La fonction  $f$  étant dérivable en  $a$ , il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que pour tout  $h$  tel que  $a+h \in \mathcal{D}_f$  :

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + h \cdot \varepsilon(h) \quad \text{où } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

La fonction  $g$  étant dérivable en  $f(a)$ , il existe une fonction  $\varepsilon'$  telle que pour tout  $k$  tel que  $f(a)+k \in \mathcal{D}_g$  :

$$g[f(a)+k] = g[f(a)] + k \cdot g'[f(a)] + k \cdot \varepsilon'(k) \quad \text{où } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon'(h) = 0$$

● **Identification de limites tendant vers 0 :**

On a l'égalité suivante :

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + h \cdot \varepsilon(h)$$

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a) + h \cdot \varepsilon(h)$$

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)]$$

On en déduit que la limite suivante :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$

Ainsi, la différence a une valeur aussi proche de 0 que l'on souhaite pour des valeurs de  $h$  suffisamment proches de 0.

● **Substitution de variables :**

Remplaçons dans l'égalité toute valeur de  $k$  par  $f(a+h) - f(a)$  :

$$g\left(f(a) + [f(a+h) - f(a)]\right) = g(f(a)) + [f(a+h) - f(a)] \cdot g'(f(a)) + [f(a+h) - f(a)] \cdot \varepsilon'(f(a+h) - f(a))$$

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + [f(a+h) - f(a)] \cdot g'(f(a)) + [f(a+h) - f(a)] \cdot \varepsilon'(f(a+h) - f(a))$$

Utilisons l'égalité  $f(a+h) - f(a) = h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)]$  :

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)] \cdot g'(f(a)) + h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)] \cdot \varepsilon'(h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)])$$

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + h \cdot g'(f(a)) \cdot f'(a) + h \cdot g'[(f(a)) \cdot \varepsilon(h)] + h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)] \cdot \varepsilon'(h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)])$$

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + h \cdot g'(f(a)) \cdot f'(a) + h \cdot [g'(f(a)) \cdot \varepsilon(h) + [f'(a) + \varepsilon(h)] \cdot \varepsilon'(h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)])]$$

Notons  $\sigma(h) = g'(f(a)) \cdot \varepsilon(h) + [f'(a) + \varepsilon(h)] \cdot \varepsilon'(h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)])$ , on a l'égalité :

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + h \cdot g'[f(a)] \cdot f'(a) + h \cdot \sigma(h)$$

● **Identification du développement limité de  $(g \circ f)$  en  $a$  :**

On a les limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)] = 0 &\implies \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon'(h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)]) = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} f'(a) + \varepsilon(h) = f'(a) & \end{aligned} \right\} \implies \lim_{h \rightarrow 0} [f'(a) + \varepsilon(h)] \cdot \varepsilon'(h \cdot [f'(a) + \varepsilon(h)]) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} g'[f(a)] \cdot \varepsilon(h) = 0$$

On en déduit que  $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0$

Ainsi, on a l'égalité suivante :

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + h \cdot g'(f(a)) \cdot f'(a) + h \cdot \sigma(h) \quad \text{où } \lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0$$

On en déduit que la fonction  $(g \circ f)$  est dérivable en  $a$  et admet pour nombre dérivée :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$$