Factorisation

Proposition :

On considère un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré $(a\neq 0)$. L'étude des racines d'un polynôme se fait par disjonction de cas sur la valeur du discriminant Δ :

- Si $\Delta<0$, le polynôme n'admet **aucune** forme factorisée.
- Si $\Delta=0$, le polynôme admet pour forme factorisée :
  $$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2$$
- Si $\Delta>0$, le polynôme admet pour forme factorisée :
  $$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a{\cdot}\big(x-x_1\big)\big(x-x_2\big)$$
  où x_1 et x_2 sont les deux racines du polynômes.

Preuve :

- Etude du cas $\Delta<0$:
  On effectue un raisonnement par l'absurde : partons de l'hypothèse que ce polynôme admette une forme factorisée.
  C'est à dire qu'il existe deux polynômes P et Q de degrés 1 tels que : $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=P\times Q$
  Or, pour que le produit $P\times Q$ soit un polynôme de degré 2, il est nécessaire que P et Q soit deux polynômes de degré 1 :
  $$P=\alpha{\cdot}x+\beta \quad ; \quad Q=\alpha'{\cdot}x+\beta'$$
  On en déduit la forme factorisée :
  $$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+d=\big(\alpha{\cdot}x+\beta\big){\cdot}\big(\alpha'{\cdot}x+\beta'\big)$$
  Intéressons-nous à l'équation suivante :
  $$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=0$$
  $$\big(\alpha{\cdot}x+\beta\big){\cdot}\big(\alpha'{\cdot}x+\beta'\big)=0$$
  Sachant qu' "*Un produit étant nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul*", on en déduit que le polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ admet deux racines $\Big(\frac{-\beta}{\alpha}$ et $\frac{-\beta}{\alpha}\Big)$.

  Ce qui est absurde puisque, lorsque $\Delta<0$, le polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ n'admet aucune racine.
  Ainsi, l'hypothèse de départ est fausse : le polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ n'admet pas de forme factorisée.
- Etude du cas $\Delta=0$:
  La forme canonique permet d'écrire :
  $$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$
  $$=a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{\Delta}{4{\cdot}a}=a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{0}{4{\cdot}a}=a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2$$
- Etude du cas $\Delta>0$:
  On peut écrire : $\big(\sqrt{\Delta}\big)^2=\Delta$

  En partant de la forme canonique d'un polynôme du second degré, on a :
  $$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}=a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{\Delta}{4{\cdot}a}$$
  $$=a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{\big(\sqrt{\Delta}\big)^2}{4{\cdot}a}=a{\cdot}\Big[\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{\big(\sqrt{\Delta}\big)^2}{4{\cdot}a^2}\Big]$$
  $$=a{\cdot}\Big[\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{\big(\sqrt{\Delta}\big)^2}{\big(2{\cdot}a\big)^2}\Big]=a{\cdot}\Big[\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)^2\Big]$$
  $$=a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)$$
  $$=a\Big(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)=a\Big(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)$$
  On reconnait les deux racines x_1 et x_2 du polynôme :
  $$=a{\cdot}\big(x-x_1\big)\big(x-x_2\big)$$