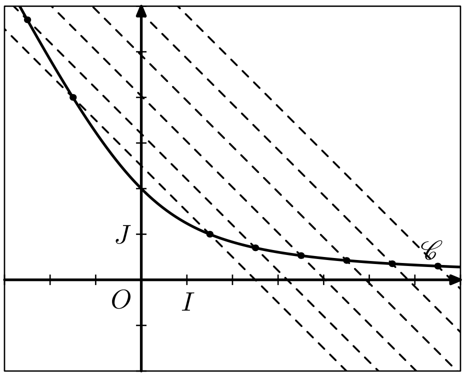
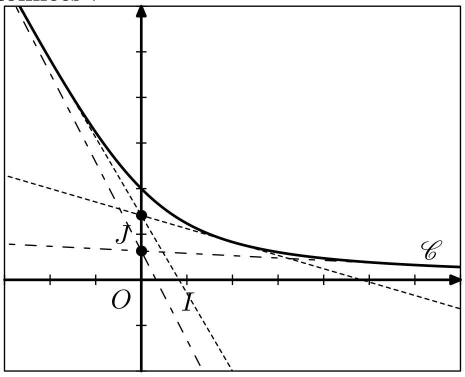
2. Les élèves doivent remarquer que toutes les droites (MN) sont parallèles et plus précisément elles ont pour coefficient directeur -1 :



Les deux tangentes (d) et (d') s'interceptent sur l'axe des ordonnées :



3. Voici les coordonnées des deux points M et N :

- $M\big(a\,;f(a)\big) = \big(a\,;-a+\sqrt{a^2+4}\big)$
- $N\big(-a\,;f(-a)\big) = \Big(-a\,;-(-a)+\sqrt{(-a)^2+4}\Big)$
$$= \big(-a\,;a+\sqrt{a^2+4}\big)$$

Ainsi, la droite (MN) a pour coefficient directeur :
$$\frac{y_M-y_N}{x_M-y_N} = \frac{-a+\sqrt{a^2+4}-\big(a+\sqrt{(-a)^2+4}\big)}{a-(-a)}$$
$$= \frac{-a+\sqrt{a^2+4}-a-\sqrt{(-a)^2+4}}{a+a}$$
$$= \frac{-2a}{2a}$$
$$= -1$$

La fonction f admet pour expression :
$$f(x) = -x+\sqrt{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x) = x^2+4$$
qui admettent comme dérivée :
$$u'(x) = 2x$$
La formule de dérivation de la composée par la fonction racine carrédonne l'expression de la fonction dérivée f' de f :
$$f'(x) = -1+\frac{u'(x)}{2{\cdot}\sqrt{u(x)}}$$
$$= -1+\frac{2x}{2{\cdot}\sqrt{x^2+4}}$$
On a :

- la tangente (d) de la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation :
$$y = f'(a){\cdot}(x-a)+f(a)$$
$$= \Big(-1+\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)(x-a)+\big(-a+\sqrt{a^2+4}\big)$$
- la tangente (d') de la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-a$ a pour équation :
$$y = f'(-a){\cdot}(x+a)+f(-a)$$
$$= \Big(-1-\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)(x+a)+\big(a+\sqrt{a^2+4}\big)$$

Déterminons l'abscisse du point d'intersection de ces deux tangentes ; cet abscisse est la solution de l'équation suivante :
$$\Big(-1+\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)(x-a)-a+\sqrt{a^2+4}$$
$$= \Big(-1-\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)(x+a)+a+\sqrt{a^2+4}$$
$$\Big(-1+\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)(x-a)-a$$
$$= \Big(-1-\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)(x+a)+a$$
$$\Big(-1+\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)(x-a)$$
$$= \Big(-1-\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)(x+a)+2a$$
$$\Big(-1+\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)x-\Big(-1+\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)a$$
$$=\Big(-1-\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)x+\Big(-1-\frac{2a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}\Big)a+2a$$
$$\frac{4a}{2{\cdot}\sqrt{a^2+4}}{\cdot}x = 0$$
$$x = 0$$
L'abscisse du point d'intersection vaut 0 : Les deux droites (d) et (d') se coupent sur l'axe des ordonnées.

