Nombres dérivés et tangentes

A. Fonctions dérivées des fonctions de référence:

1. Définition :

Définition :

Soit f un fonction définie sur un intervalle I.
On dit que la fonction f est **dérivable sur l'ntervalle** I si elle est admet un nombre dérivée pour tout nombre a de l'intervalle I.

Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
On appelle **fonction dérivée de** f, la fonction définie sur I qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivée de la fonction f en x : $\quad x \longmapsto f'(x)$

On la note f'.

2. Fonctions de référence :

Fonction	Dérivable sur	Fonction dérivée
Fonction constante $x \longmapsto c$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
Fonction identité $x \longmapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 1$
Fonction carré	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 2{\cdot}x$
Fonction cube	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 3{\cdot}x^2$
Monôme $x \longmapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto n{\cdot}x^{n-1}$
Fonction inverse	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$
Fonction valeur absolue	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

Preuve :

- Etablissons l'expression de la dérivée de la fonction carré notée f :
  Pour a un nombre réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de la fonction f en a. Par définition, on a :
  $$\lim_{h\mapsto 0} f'(a) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
  ➩ On a les transformations algébriques :
  $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2{\cdot}a{\cdot}h+h^2-a^2}{h}$$
  $$= \frac{2{\cdot}a{\cdot}h+h^2}{h} = \frac{h{\cdot}(2{\cdot}a+h)}{h} = 2{\cdot}a+h$$
  ➩ On a la limite :
  $$\lim_{h\mapsto 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} 2{\cdot}a+h = 2{\cdot}a$$
  On en déduit que le nombre dérivée en a de la fonction f a pour valeur : $\quad f'(a) = 2{\cdot}a$

  Ainsi, l'expression de la fonction dérivée est :
  $f'(x) = 2{\cdot}x$
- Pour les autres fonctions de référence, se reporter au lien suivant : r184-0

B. Linéarité de la dérivation:

Proposition :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- La fonction $u{+}v$ définie pour tout $x\in I$ par :
  $u{+}v : x \longmapsto u(x)+v(x)$
  est une fonction dérivable sur I où :
  $(u{+}v)'(x) = u'(x)+v'(x)$
- La fonction $u{-}v$ définie pour tout $x\in I$ par :
  $u{-}v : x \longmapsto u(x)-v(x)$
  est une fonction dérivable sur I où :
  $(u{-}v)'(x) = u'(x)-v'(x)$
- Pour $k\in\mathbb{R}$ et $x\in I$, la fonction $k{\cdot}u$ définie par :
  $k{\cdot}u : x \longmapsto k\times u(x)$
  est une fonction dérivable sur I où :
  $(k{\cdot}u)'(x) = k\times u'(x)$

Exemple :

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = 2{\cdot}\sqrt{x}+3{\cdot}x^2-x+3$$
La formule d. permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = 2{\cdot}\left(\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}\right)+3{\cdot}(2{\cdot}x)-1+0 = \frac{1}{\sqrt{x}}+6{\cdot}x-1$$

Preuve :

à gauche et centrée : r183-0

C. Tangentes:

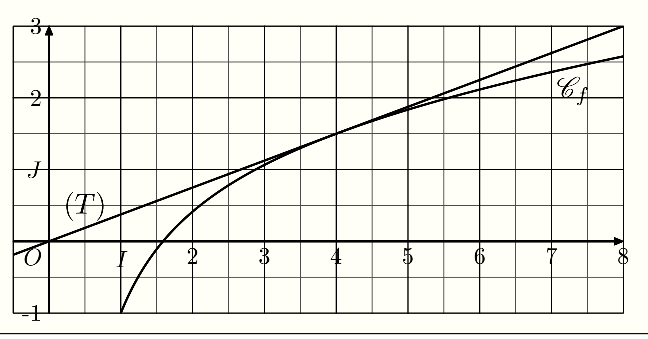
Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f(x) = \sqrt{x}-\frac{2}{x}$$
Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

La fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}-2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}$$
On a les valeurs suivantes :

- L'image du nombre 4 par la fonction f :
  $$f(4) = \sqrt{4}-\frac{2}{4} = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
- Le nombre dérivée de la fonctin f en 4 a pour valeur :
  $$f'(4) = \frac{1}{2{\cdot}\sqrt{4}}+\frac{2}{4^2} = \frac{1}{2\times 2}+\frac{2}{16} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

On en déduit l'équation réduite de la tangente (T) :
$$y = f'(4){\cdot}(x-4)+f(4)$$
$$y = \frac{3}{8}{\cdot}(x-4)+\frac{3}{2}$$
$$y = \frac{3}{8}{\cdot}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$$
$$y = \frac{3}{8}{\cdot}$$



D. Sens de variations:

Proposition : *(admis)*

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I :

- f est croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur I ;
- f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est négative sur I ;
- f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $[-2{,}5\,;3]$ par :
$$f(x) = x^3-\frac{3}{2}{\cdot}x^2-6{\cdot}x+1$$
qui admet pour représentation la courbe $\mathscr{C}_f$ représentée ci-dessous :

On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses -2 et 1.

La fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :
$$f'(x) = 3{\cdot}x^2-\frac{3}{2}{\cdot}(2x)-6\times 1+0 = 3{\cdot}x^2-3{\cdot}x-6$$
La fonction f' est une fonction du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2-4\times 3\times(-6) = 9+72 = 81$$
On a la simplification : $\quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Le discriminant étant strictement positif, la fonction f' s'annule pour :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)-9}{2\times 3} = \frac{3-9}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)+9}{2\times 3} = \frac{3+9}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signe de la fonction f' sur $[-2{,}5\,;3]$:

x	$-2{,}5$		-1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit :

- sur $[-2{,}5\,;-1]$ et sur $[2\,;3]$, la fonction f est croissante.
- sur $[-1\,;2]$, la fonction f est décroissante.

E. Extrémums:

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$ et c un nombre appartenant à l'intervalle $[a\,;b]$.

- On dit que la fonction f admet un **maximum** en c si, pour tout $x\in[a\,;b]$, on a :
  $f(c) \geqslant f(x)$
- On dit que la fonction f admet un **minimum** en c si, pour tout $x\in[a\,;b]$, on a :
  $f(c) \leqslant f(x)$
- On dit que la fonction f admet un **extrémum** en c si la fonction f admet en c un minimum ou un maximum.

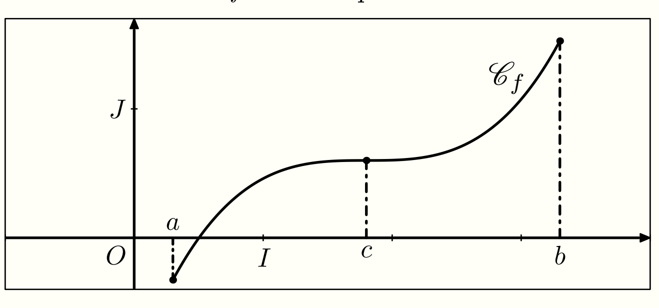
Proposition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a\,;b[$ et c un nombre de cet intervalle.

Si f admet un extrémum en c alors $f'(c) = 0$

Remarque :

- La réciproque est fausse. La fonction f, représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère, vérifie $f'(c)=0$ mais la fonction f n'admet pas un extrémum en c.



- Ainsi, pour trouver les extrémums d'une fonction, on recherche les valeurs c de l'intervalle $[a\,;b]$ vérifiant $f'(c)=0$.
  On vérifie ensuite lesquels représentent un extrémum.
- Si f' s'annule en x_0 et change de signe en x_0 alors f admet un minimum ou un maximum localement en x_0.

Preuve : *(hors programme)*

Soit f admettant un minimum en $c\in]a\,;b[$. Ainsi, pour tout réel $x\in]a\,;b[$, on a :
$f(c) \leqslant f(x)$

Une notion "hors-programme" de la classe de première est la limite à droite et la limite à gauche

- Pour $h\in\mathbb{R}_-^*$ tel que $c{+}h\in[a\,;b]$ et sachant que la fonction f admet un minium en c, on a :
  $$f(c) \leqslant f(c{+}h)$$
  $$0 \leqslant f(c{+}h)-f(c)$$
  $$f(c{+}h)-f(c) \geqslant 0$$
  Le nombre h étant strictement négatif :
  $$\frac{f(c{+}h)-f(c)}{h} \leqslant 0$$
  Par passage à la limite, on a :
  $$\lim_{h\mapsto 0^-} \frac{f(c{+}h)-f(c)}{h} \leqslant 0$$
  La fonction f étant dérivable en c :
  $$f'(c) \leqslant 0$$
- Pour $h\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $c{+}h\in[a\,;b]$ et sachant que la fonction f admet un minium en c, on a :

$$f(c) \leqslant f(c+h)$$
$$0 \leqslant f(c+h) - f(c)$$
$$f(c+h) - f(c) \geqslant 0$$

Le nombre h étant strictement positif :

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Par passage à la limite, on a :

$$\lim_{h \mapsto 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

La fonction f étant dérivable en c :

$$f'(c) \geqslant 0$$

Le nombre c vérifiant $f'(c) \leqslant 0$ et $f'(c) \geqslant 0$, on en déduit :
$f'(c) = 0$

Proposition :

Soit f est une fonctin définie et dérivable sur un intervalle I et x_0 un nombre réel de I.

- Si f admet un maximum ou minimun sur l'intervalle I en x_0 alors on a : $f'(x_0) = 0$
-

Exemple :

Exercice 1

On considère la fonction f définit sur $\left[0\,;10\right]$ par :
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$
Montrer que la fonction f admet un maximum en 1.

Correction 1

La formule de dérivation du quotient de deux fonctions permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = \frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$$
Le dénominateur étant strictement positif, le signe de f' est celui de son numérateur qui est un polynôme du second degré :

x	0		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f' s'annule en 1 et change de signes : la fonction f admet un maximum en 1 sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$