Proposition :

Considérons deux droites (d) et (d') admettant respectivement pour équation réduite :

$y=a{\cdot}x+b \quad ; \quad y=a'{\cdot}x+b'$

- les deux droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, $a'=a$
- les droites (d) et (d') sont perpendiculaires si, et seulement si, $a'=-\dfrac{1}{a}$

Preuve :

Considérons deux droites (d) et (d') admettant respectivement les équations réduites :

$y=a{\cdot}x+b \quad ; \quad y=a'{\cdot}x+b'$

Les points $A(0\,;b)$ et $B(1\,;a{+}b)$ appartiennent à la droite (d). Les points $C(0\,;b')$ et $D(1\,;a'{+}b')$ appartiennent à la droite (d').

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(1\,;a)$ et $\overrightarrow{CD}(1\,;a')$ sont directeurs respectivement des droites (d) et (d') :

- ➪ Supposons que (d) et (d') sont parallèles. Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Il existe un réel α vérifiant : $\overrightarrow{CD}=\alpha{\cdot}\overrightarrow{AB}$
  L'identification sur les abscisses permet d'affirmer $\alpha=1$: on en déduit l'égalité $a=a'$.

  ➪ Supposons que $a=a'$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont des coordonnées égales et on en déduit :
  $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
  Ainsi, les droites (d) et (d') sont parallèles.

- Dans l'énoncé direct et sa réciproque, les droites (d) et (d') ne peuvent être parallèles *(soit perpendiculaires, soit coefficients directeurs distincts)* : les droites (d) et (d') sont donc sécantes.
  Notons $M(x_0\,;y_0)$ les coordonnées du points d'intersection. Considérons les points :
  $N(x_0{+}1\,;y_0{+}a) \quad ; \quad P(x_0{+}1\,;y_0{+}a')$
  appartenant respectivement aux droites (d) et (d').

  On a les distances suivantes :

  ➪ $MN=\sqrt{\big(x_N-x_M\big)^2+\big(y_N-y_M\big)^2}=\sqrt{1^2+a^2}$

  ➪ $MP=\sqrt{\big(x_P-x_M\big)^2+\big(y_P-y_M\big)^2}=\sqrt{1^2+a'^2}$

  ➪ $NP=\sqrt{\big(x_P-x_N\big)^2+\big(y_P-y_N\big)^2}$
  $=\sqrt{0^2+\big(a'-a\big)^2}=\sqrt{\big(a'-a\big)^2}$

  $NP^2-MN^2-MP^2$
  $=\Big(\sqrt{\big(a'-a\big)^2}\Big)^2-\Big(\sqrt{1^2+a'^2}\Big)^2-\Big(\sqrt{1^2+a^2}\Big)^2$
  $=a'^2-2{\cdot}a{\cdot}a'-a^2-2-a'^2-a^2=-2{\cdot}a{\cdot}a'-2$

  On a les équivalences :

  (d) et (d') perpendiculaires
  $\iff MNP$ est rectangle en M
  $\iff NP^2=MP^2+MN^2$
  $\iff NP^2-MP^2-MN^2=0$
  $\iff -2{\cdot}a{\cdot}a'-2=0$
  $\iff a'=-\dfrac{1}{a}$

Proposition :

Considérons deux droites (d) et (d') admettant respectivement pour équation réduite :

$y=a{\cdot}x+b \quad ; \quad y=a'{\cdot}x+b'$

- les deux droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, $a'=a$
- les droites (d) et (d') sont perpendiculaires si, et seulement si, $a'=-\dfrac{1}{a}$

Preuve :

Considérons deux droites (d) et (d') admettant respectivement les équations réduites :

$y=a{\cdot}x+b \quad ; \quad y=a'{\cdot}x+b'$

Les points $A(0\,;b)$ et $B(1\,;a{+}b)$ appartiennent à la droite (d). Les points $C(0\,;b')$ et $D(1\,;a'{+}b')$ appartiennent à la droite (d').

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(1\,;a)$ et $\overrightarrow{CD}(1\,;a')$ sont directeurs respectivement des droites (d) et (d') :

- ➪ Supposons que (d) et (d') sont parallèles. Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Il existe un réel α vérifiant : $\overrightarrow{CD}=\alpha{\cdot}\overrightarrow{AB}$
  L'identification sur les abscisses permet d'affirmer $\alpha=1$: on en déduit l'égalité $a=a'$.

  ➪ Supposons que $a=a'$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont des coordonnées égales et on en déduit :
  $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
  Ainsi, les droites (d) et (d') sont parallèles.

- Dans l'énoncé direct et sa réciproque, les droites (d) et (d') ne peuvent être parallèles *(soit perpendiculaires, soit coefficients directeurs distincts)* : les droites (d) et (d') sont donc sécantes.
  Notons $M(x_0\,;y_0)$ les coordonnées du points d'intersection. Considérons les points :
  $N(x_0{+}1\,;y_0{+}a) \quad ; \quad P(x_0{+}1\,;y_0{+}a')$
  appartenant respectivement aux droites (d) et (d').

  On a les distances suivantes :

  ➪ $MN=\sqrt{\big(x_N-x_M\big)^2+\big(y_N-y_M\big)^2}=\sqrt{1^2+a^2}$

  ➪ $MP=\sqrt{\big(x_P-x_M\big)^2+\big(y_P-y_M\big)^2}=\sqrt{1^2+a'^2}$

  ➪ $NP=\sqrt{\big(x_P-x_N\big)^2+\big(y_P-y_N\big)^2}$
  $=\sqrt{0^2+\big(a'-a\big)^2}=\sqrt{\big(a'-a\big)^2}$

  $NP^2-MN^2-MP^2$
  $=\Big(\sqrt{\big(a'-a\big)^2}\Big)^2-\Big(\sqrt{1^2+a'^2}\Big)^2-\Big(\sqrt{1^2+a^2}\Big)^2$
  $=a'^2-2{\cdot}a{\cdot}a'-a^2-2-a'^2-a^2=-2{\cdot}a{\cdot}a'-2$

  On a les équivalences :

  (d) et (d') perpendiculaires
  $\iff MNP$ est rectangle en M
  $\iff NP^2=MP^2+MN^2$
  $\iff NP^2-MP^2-MN^2=0$
  $\iff -2{\cdot}a{\cdot}a'-2=0$
  $\iff a'=-\dfrac{1}{a}$