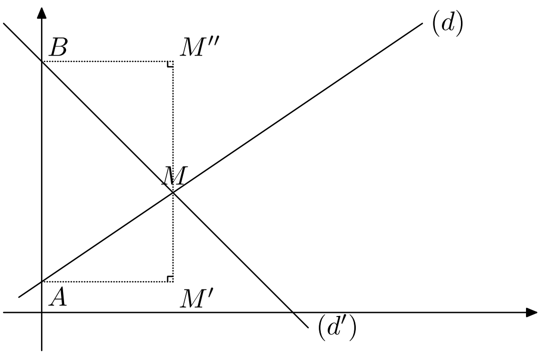
Soit f et g deux fonctions affines dont les droites représentatives respectives (d) et (d') sont perpendiculaires.



Ces deux fonctions affines admettent des expressions données par :

$f(x) = a{\cdot}x + b \quad ; \quad g(x) = a'{\cdot}x + b'$

où a, a', b, b' sont des nombres réels.

Puisque les droites (d) et (d') représentatives sont perpendiculaires, on en déduit la relation suivante sur leurs coefficients directeurs :

$$a \times a' = -1$$
$$a' = \frac{-1}{a}$$

On en déduit que la fonction g admet pour expression :

$$g(x) = -\frac{1}{a}{\cdot}x + b'$$

- Déterminons le point M d'intersection des droites (d) et (d').

  L'abscisse du point M est solution de l'équation :

$$f(x) = g(x)$$
$$a{\cdot}x + b = -\frac{1}{a}{\cdot}x + b'$$
$$a{\cdot}x = -\frac{1}{a}{\cdot}x + b' - b$$
$$a{\cdot}x + \frac{1}{a}{\cdot}x = b' - b$$
$$\Big(a + \frac{1}{a}\Big){\cdot}x = b' - b$$
$$\Big(\frac{a^2+1}{a}\Big){\cdot}x = b' - b$$
$$x = \frac{b'-b}{\dfrac{a^2+1}{a}}$$
$$x = \frac{b'-b}{\times}\,\frac{a}{a^2+1}$$
$$x = \frac{(b'-b)a}{a^2+1}$$

  Le point M appartenant à la droite (d) sont ordonnées a pour valeur :

$$f\Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1}\Big) = a{\cdot}\frac{(b'-b)a}{a^2+1} + b$$

  Le point M a pour coordonnées :

$$M\Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1}\,;a{\cdot}\frac{(b'-b)a}{a^2+1} + b\Big) = \Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1}\,;\frac{(b'-b)a^2}{a^2+1} + b\Big)$$

- La droite (d) passe par le point de coordonnées $A(0\,;b)$.

  Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AM}(x_M - x_A\,;y_M - y_A)$$
$$= \Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1} - 0\,;\frac{(b'-b)a^2}{a^2+1} + b - b\Big)$$
$$= \Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1}\,;\frac{(b'-b)a^2}{a^2+1}\Big)$$

  Dans le triangle AMM' rectangle en M', on en déduit la mesure de AM^2 :

$$AM^2 = \Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1}\Big)^2 + \Big(\frac{(b'-b)a^2}{a^2+1}\Big)^2$$
$$= \frac{(b'-b)^2a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{(b'-b)^2a^4}{(a^2+1)^2}$$

- La droite (d') passe par le point de coordonnées $B(0\,;b')$.

  Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{BM}(x_M - x_B\,;y_M - y_B)$$
$$= \Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1} - 0\,;\frac{(b'-b)a^2}{a^2+1} + b - b'\Big)$$
$$= \Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1}\,;\frac{(b'-b)a^2 + (b-b')(a^2+1)}{a^2+1}\Big)$$
$$= \Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1}\,;\frac{b-b'}{a^2+1}\Big)$$

  Dans le triangle BMM'' rectangle en M'', on en déduit la mesure de BM^2 :

$$BM^2 = \Big(\frac{(b'-b)a}{a^2+1}\Big)^2 + \Big(\frac{b-b'}{a^2+1}\Big)^2$$
$$= \frac{(b'-b)^2a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{(b-b')^2}{(a^2+1)^2}$$

- On en déduit :

$$AM^2{+}BM^2 = \frac{(b'{-}b)^2a^2}{(a^2{+}1)^2} + \frac{(b'{-}b)^2a^4}{(a^2{+}1)^2} + \frac{(b'{-}b)^2a^2}{(a^2{+}1)^2} + \frac{(b{-}b')^2}{(a^2{+}1)^2}$$
$$= \frac{(b'-b)^2a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{(b'-b)^2a^4}{(a^2+1)^2} + \frac{(b'-b)^2a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{(b-b')^2}{(a^2+1)^2}$$
$$= \frac{(b'-b)^2a^2 + (b'-b)^2a^4 + (b'-b)^2a^2 + (b-b')^2}{(a^2+1)^2}$$
$$= \frac{(b'-b)^2(a^2+a^4+a^2+1}{(a^2+1)^2}$$
$$= \frac{(b'-b)^2(a^4+2a^2+1)}{(a^2+1)^2}$$
$$= \frac{(b'-b)^2(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2}$$
$$= (b'-b)^2$$

  On vient d'établir l'égalité : $AM^Z{+}BM^2{=}AB^2$

  D'après la réciproque de Pythogore, on en déduit que le triangle ABM est rectangle en M : les droites (d) et (d') sont perpendiculaires.