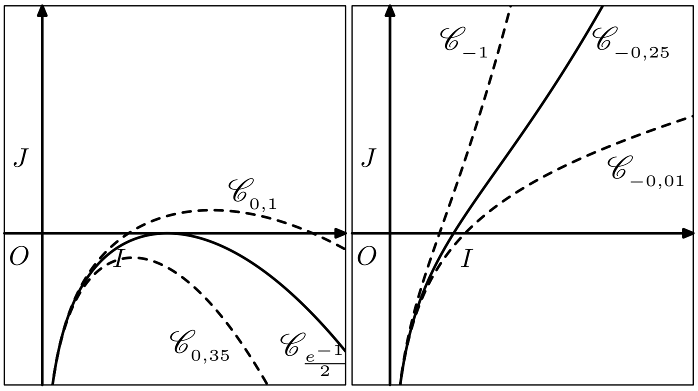
1. L'ensemble de résolution de l'équation (E) est $\mathbb{R}_+^*$.

2. En déplaçant le curseur à l'aide de la souris, le pas d'incrémentation n'est pas celui utilisé lors de la définition du curseur.
Il est préférable de sélectionner le curseur puis d'utiliser les flèches directionnelles pour observer une incrémentation de 0,01.

3. a. Un zoom autour de l'axe des abscisses montre que la fonction f_k admet un unique zéro pour une valeur de k proche de 0,18. La solution (E) admet une unique solution pour $k \simeq 0{,}2$.

b. Avec Geogebra, on observe les trois cas suivants :
- $\left]-\infty\,;0\right[$: (E) admet une seule solution ;
- $\left]0\,;0{,}18\right[$: (E) admet deux solutions.
- $\left]0{,}19\,;+\infty\right[$: (E) n'admet pas de solution.

Voici les une représentation des observations faîtes par les élèves :



4. a. Cette fonction admet pour dérivée :
$$f_k'(x) = \frac{1}{x} - k\cdot(2x) = \frac{1}{x} - \frac{2k\cdot x^2}{x} = \frac{1-2k\cdot x^2}{x}$$
k étant strictement négatif, on en déduit que le numérateur est strictement positif ; sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur est positif.
Ainsi, pour $k<0$, la fonction dérivée f_k' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$: la fonction f_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Or, la fonction f admet les deux limites suivantes :
- On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} -k\cdot x^2 = 0$$
On en déduit :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} f_k(x) = -\infty$$
- On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} \ln(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} -k\cdot x^2 = +\infty$$
On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} f_k(x) = +\infty$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que, pour $k<0$, la fonction f_k admet une unique solution.

b. Etablissons le tableau de variation de la fonction f_k pour $k>0$. D'après l'exercice précédent, on a :
$$f_k'(x) = \frac{1-2k\cdot x^2}{x}$$
Etant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur est strictement positif ; le signe de la dérivée admet le tableau de signe suivant :

x	0		$\sqrt{\frac{1}{2k}}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi pour $k>0$, la fonction f_k admet un maximum dont l'abscisse est $\sqrt{\dfrac{1}{2\cdot k}}$

La valeur maximale de la fonction f_k est :
$$f\Big(\frac{1}{2k}\Big) = \ln\Big(\sqrt{\frac{1}{2k}}\Big) - k\cdot\Big(\sqrt{\frac{1}{2\cdot k}}\Big)^2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\ln\Big(\frac{1}{2k}\Big) - k\cdot\frac{1}{2\cdot k}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\ln(2k) - \frac{1}{2}$$
Déterminons la valeur de k pour laquelle ce maximum a pour valeur 0 :
$$f\Big(\frac{1}{2k}\Big) = 0$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\ln(2k) - \frac{1}{2} = 0$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\ln(2k) = \frac{1}{2}$$
$$\ln(2k) = -1$$
$$e^{\ln(2k)} = e^{-1}$$
$$2k = e^{-1}$$
$$k = \frac{e^{-1}}{2}$$
On a la valeur approchée ci-dessous qui confirme la conjecture de la question 2. a. :
$$\frac{e^{-}1}{2} \simeq 0{,}1839$$

