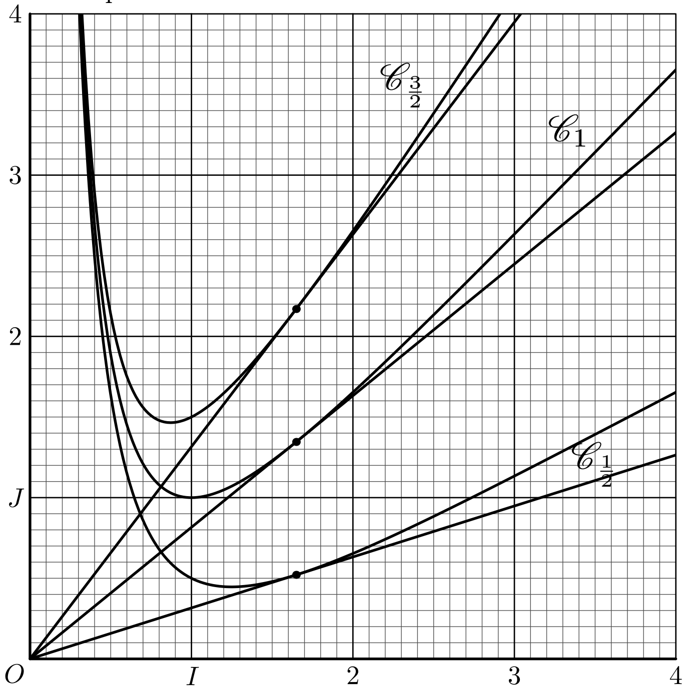
1. b. Voici la représentation de ces trois courbes et de leurs tangentes respectives passant par l'origine du repère :



2. a. On remarque que les points par lesquelles la tangente passe ont tous la même abscisse qui vaut environ 1,64

b. La fonction f_k admet la fonction dérivée $f_k'(x)$ dont l'expression est :

$$f_k'(x) = k - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \big(\ln x\big)\cdot 1}{x^2}$$
$$= k - \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse a aura pour équation :

$$y = f'(a)\cdot\big(x-a\big) + f(a)$$
$$= \Big(k - \frac{1-\ln a}{a^2}\Big)\cdot\big(x-a\big) + k\cdot a - \frac{\ln a}{a}$$
$$= k\cdot x + \frac{1-\ln a}{a} - a\cdot k - \frac{1-\ln a}{a^2}\cdot x + k\cdot a - \frac{\ln a}{a}$$
$$= \frac{1-\ln a}{a} - a\cdot k + k\cdot a - \frac{\ln a}{a} + \Big(k - \frac{1-\ln a}{a^2}\Big)\cdot x$$
$$= \frac{1-\ln a}{a} - \frac{\ln a}{a} + \Big(k - \frac{1-\ln a}{a^2}\Big)\cdot x$$
$$= \frac{1-2\cdot\ln a}{a} + \Big(k - \frac{1-\ln a}{a^2}\Big)\cdot x$$

La tangente passant par l'origine de coordonnées $\big(0\,;0\big)$:

$$0 = \frac{1-2\cdot\ln a}{a} + \Big(k - \frac{1-\ln a}{a^2}\Big)\times 0$$
$$0 = \frac{1-2\cdot\ln a}{a}$$
$$0 = 1-2\cdot\ln a$$
$$-2\cdot\ln a = -1$$
$$\ln a = \frac{1}{2}$$
$$a = e^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui prouve que chaque courbe $\mathscr{C}_k$ admet une tangente passant par l'origine et par le point de cette courbe d'abscisse $e^{\frac{1}{2}}$.