Déravibilité et continuité

A. Dérivabilité:

1. Rappel:

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un nombre réel appartenant à I.
On dit que la fonction f est **dérivable en** a si la limite suivante existe:
$$\lim_{\substack{h\mapsto 0\\ a+h\in I}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
Dans ce cas, la valeur de cette limite s'appellera **nombre dérivée de la fonction** f **en** a et on le notera $f'(a)$.

Remarque:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et $a+h$ deux nombres appartenant à I qui sont les abscisses respectives des points A et B de la courbe $\mathscr{C}$ *(Fig.1)*.
Le coefficient directeur de la corde (AB) se calcule par:
$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

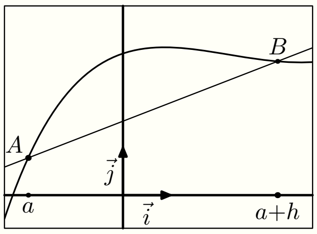


Fig. 1

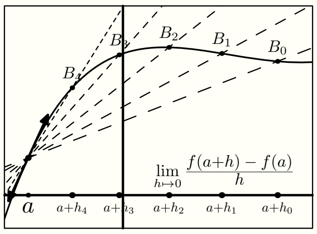


Fig. 2

La figure 2 présente la tangente au point d'abscisse a comme la position "*limite*" des cordes lorsque la suite de points B_n se rapproche du point A.

On **admet** que si une fonction f est dérivable en a alors:

- La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente en a;
- Le coefficient directeur de cette tangente est:
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Proposition:

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $a\in I$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f au point d'abscisse a a pour équation:
$$y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$$

Preuve:

Soit f une fonction définie et dérivable en a. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
Le point $A(a\,;f(a))$ appartient à $\mathscr{C}_f$. On dit que A *est l'unique point de* $\mathscr{C}_f$ *d'abscisse* a.

Notons (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A. Son coefficient directeur vaut $f'(a)$. Ainsi, son équation réduite s'exprime sous la forme:
$$y=f'(a)\cdot x+b \qquad \text{où } b\in\mathbb{R}$$
Les coordonnées du point A vérifie cette équation
$$y_A=f'(a)\cdot x_A+b$$
$$f(a)=f'(a)\cdot a+b$$
$$b=f(a)-f'(a)\cdot a$$
Ainsi, l'équation réduite de la droite (d) s'exprime par:
$$y=f'(a)\cdot x+b$$
$$y=f'(a)\cdot x+\big[f(a)-f'(a)\cdot a\big]$$
$$y=f'(a)\cdot\big(x-a\big)+f(a)$$

Définition:

- Une fonction est dite **dérivable sur l'intervalle** I si elle est dérivable pour tout nombre a appartenant à I.
- Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Il existe une fonction associant à tout nombre x de I le nombre dérivée associé à la fonction:
$$x\longmapsto f'(x)$$
Cette fonction s'appelle la **fonction dérivée de la fonction** f **sur** I et est notée f'.

Proposition:

Le tableau ci-dessous résume l'expression des fonctions dérivées des fonctions de références:

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}'$
k	0	$\mathbb{R}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

Preuve:

Voir le document:
`http://chingatome.fr/r468`

Proposition:

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Voici quelques propriétés de dérivations sur les opérations algébriques:

Expression algébrique	Expression de la fonction dérivée	Domaine de dérivation
$k\cdot u$	$k\cdot u'$	I
$u+v$	$u'+v'$	I
$u-v$	$u'-v'$	I
$k\cdot u+\ell\cdot v$	$k\cdot u'+\ell\cdot v'$	I
$u\cdot v$	$u'\cdot v+u\cdot v'$	I
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\{x\in I \mid v(x)\neq 0\}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$	$\{x\in I \mid v(x)\neq 0\}$

Preuve:

Voir le document:
`http://chingatome.fr/r468`

B. Dérivation des fonction composées :

Proposition :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I :

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}'_f$
$\big[u(x)\big]^n$	$n\cdot u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^{n-1}$	I
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}$	$\big\{x\in I \mid u(x)\neq 0\big\}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}}$	$\big\{x\in\mathbb{R} \mid u(x)>0\big\}$
$u(a\cdot x+b)$	$a\cdot u'(a\cdot x+b)$	$\big\{x\in\mathbb{R} \mid a\cdot x+b\in I\big\}$

Remarque :

On remarque les expressions suivantes :

- $\Big(\big[u(x)\big]^n\Big)' = u'(x)\cdot\Big(n\cdot\big[u(x)\big]^{n-1}\Big)$
- $\Big(\dfrac{1}{u(x)}\Big)' = u'(x)\cdot\Big(-\dfrac{1}{\big[u(x)\big]^2}\Big)$
- $\Big(\sqrt{u(x)}\Big)' = u'(x)\cdot\Big(\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{u(x)}}\Big)$

On observe la formule générale de dérivation de la fonction composée de la fonction u par la fonction f :

$$\big(f\big[u(x)\big]\big)' = u'(x)\times f'\big[u'(x)\big]$$

Voir : `http://chingatome.fr/r585`

1. Fonctions non-dérivables :

Voici quelques exemples de fonctions non-dérivables au point a :

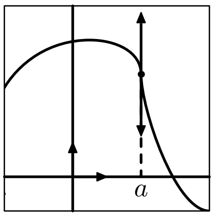


Fig. 1

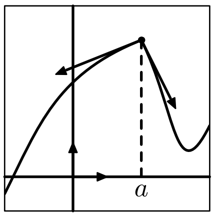


Fig. 2

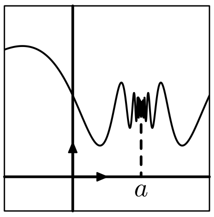


Fig. 3

- Fig. 1 : la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a. On a :
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$$
- Fig. 2 : la courbe $\mathscr{C}_g$ admet deux demi-tangentes en a :
$$\lim_{h\mapsto 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \neq \lim_{h\mapsto 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- Fig. 3 : la courbe $\mathscr{C}_f$ admet n'admet aucune tangente en a :
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ n'existe pas.}$$

C. Fonctions continues :

1. Approche de la continuité :

Introduction :

Soit a un nombre réel. Une fonction f est dite continue en a si :

- f est définie en a ;
- La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracé d'un seul trait autour de a.

Exemple :

Exemple de fonction non-continue en a :

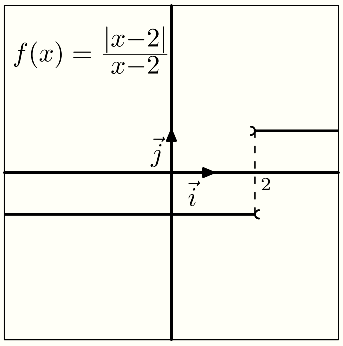


Fig 1

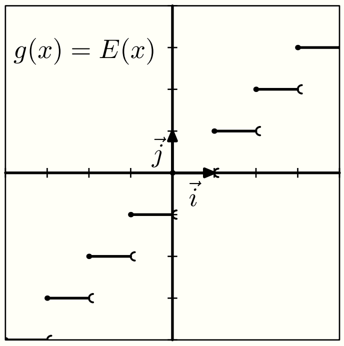


Fig 2

- La fonction f n'est pas définie en 2 : elle n'est pas continue en 2.
- La fonction g est la fonction "*partie entière*" : elle n'est pas continue pour tout $x\in\mathbb{N}$. En particulier pour le nombre 2 :
$$\lim_{x\mapsto 2^+} f(x) = f(2) \neq \lim_{x\mapsto 2^-} f(x)$$

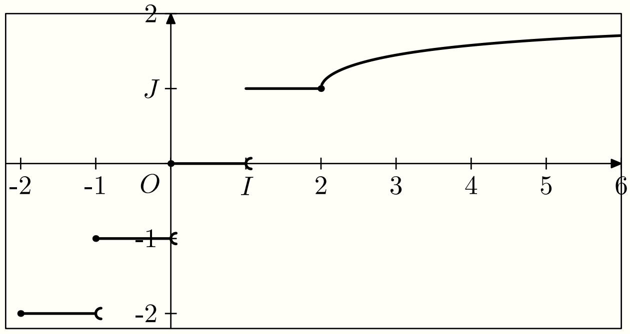
Définition :

Une fonction est dite continue sur un intervalle I si elle est continue pour tout nombre a de l'intervalle I.

Exemple :

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\begin{cases} f(x) = E(x) & \text{si } x<2 \\ f(x) = 1 & \text{si } x=2 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$$



Montrons que la fonction f est continue en 2 :

- Sur l'intervalle $\big[1\,;2\big[$, la fonction E est constante est vaut 1. On en déduit la limite :
$$\lim_{\substack{x\mapsto 2^-\\ x\in[1;2]}} f(x) = \lim_{\substack{x\mapsto 2^-\\ x\in[1;2]}} E(x) = 1$$
- Sur $\big]2\,;+\infty\big[$, on a les transformations algébriques :

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}+1=\frac{x-2}{\sqrt{(x+2)(x-2)}}+1$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2}}+1=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}+1$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto 2^+} f(x)=\lim_{x\mapsto 2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}+1=\frac{0}{2}+1=1$$

On en déduit que la fonction f est continue en 1 :
$\lim_{x\mapsto 2^-} f(x)=\lim_{x\mapsto 2^+} f(x)=1$

2. *Propriété de la continuité :*

Proposition : *(admise)*

- Les fonctions polynômiales, la fonction racine carrée sont continues sur leur ensemble de définition.
- La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Proposition : *(admise)*

La somme, le produit, le quotient de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles contenus dans leur ensemble de définition.

Exemple :

- $f(x)=x^2+\sqrt{x}$
  La fonction carré et la fonction racine carré sont continues sur $[0;+\infty[$. Comme somme de fonctions continues, la fonction f est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
- $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.
  La fonction racines carrées et la fonction polynômiale du dénominateur sont continues sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
  La fonction g est définie sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$. Comme quotient de fonctions continues, la fonction g est continue sur $[0;1[$ et continue sur $]1;+\infty[$.

Proposition : *(admise)*

Si une fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur I

Remarque :

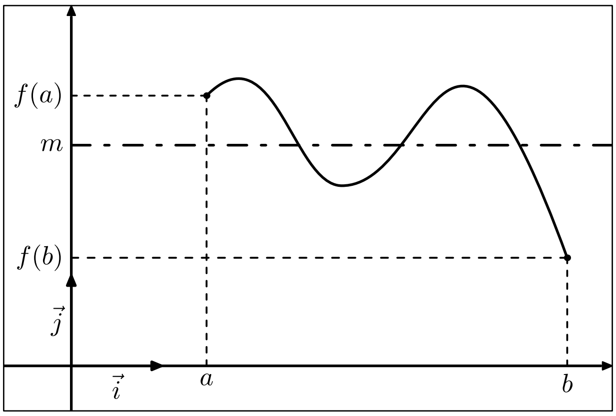
La réciproque est fausse : voir la figure 2 du **B. 2.**

D. Théorème des valeurs intermédiaires :

1. *Sur un intervalle bornée :*

Théorème :

Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$.
Pour tout $m\in\mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a;b]$ tel que $f(c)=m$.



Corollaire :

Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$.
Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe au moins un nombre réel c appartenant à $[a;b]$ tel que $f(c)=0$.

Exemple :

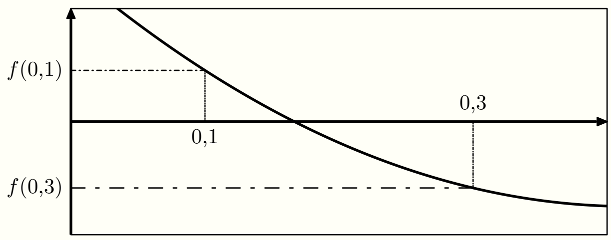
Soit f définie par : $6x^2-5x+\frac{2}{3}$
Montrons que f s'annule sur $[0{,}1;0{,}2]$.

Remarquons : $f(0{,}1)\simeq 0{,}22>0$; $f(0{,}2)\simeq -0{,}09<0$

On a :

- f est continue sur $[0{,}1;0{,}2]$
- $f(0{,}1)$ et $f(0{,}2)$ sont de signes contraires

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c\in[0{,}1;0{,}2]$ tel que $f(c)=0$



Corollaire :

Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$.
Si f est strictement monotone sur I alors, pour tout $m\in\mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c appartenant à $[a;b]$ tel que $f(c)=m$

Exemple :

Soit f la fonction carré. Montrons qu'il existe un nombre appartenant à $\mathbb{R}^+$ ayant 3 pour carré.
Remarquons : $f(1)=1$; $f(2)=4$

On a :

- f est continue sur $[1;2]$
- f est strictement croissante sur $[1;2]$
- 3 est compris entre les images des bornes de $[1;2]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $c\in[1;2]$ tel que $f(c)=3$.

2. *Sur un intervalle quelconque :*

Dans cette partie, a et b désignent soit un réel, soit $\pm\infty$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur $]a;b[$.
Si f est continue alors pour tout réel m strictement compris entre $\lim_{x\mapsto a} f(x)$ et $\lim_{x\mapsto b} f(x)$, l'équation $f(x)=m$ admet

au moins une solution dans $]a\,;b[$.

Corollaire :

Soit f une fonction définie sur $]a\,;b[$ et $k \in \mathbb{R}$.
Si :

- f est continue sur $]a\,;b[$
- f est strictement monotone sur $]a\,;b[$
- m est compris entre les limites de f aux bornes de $]a\,;b[$

alors il existe un réel $c \in]a\,;b[$ tel que $f(c) = m$.

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

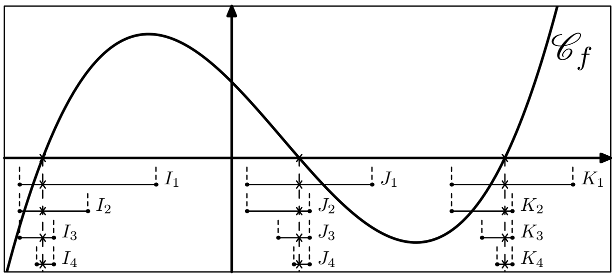
$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 2{\cdot}x + 1}$$

Remarquons :
- $f(0) = 1$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$
- $f'(x) = -\dfrac{2{\cdot}x^3 + 2}{\left(x^3 + 2{\cdot}x + 1\right)^2} < 0$

On a :
- f est continue sur $[0\,;+\infty[$
- f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$
- 0,1 est strictement compris entre les limites de f aux bornes de $[0\,;+\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0{,}1$

E. Dichotomie :



Pour en savoir plus :

`http://chingatome.fr/r212`

