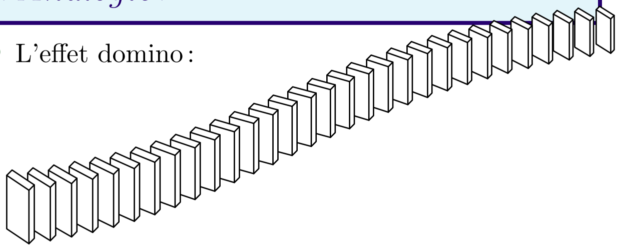
Raisonnement par récurrence

A. Introduction:

1. Analogie:

- L'effet domino:



Si la suite de dominos sont correctement placés, faire tomber le premier, fera tomber tous les dominos.
Il faut être sûr que les dominons sont bien placés afin que **si un domino tombe alors le suivant tombera**

- Le virus:

Un virus très puissant a été créé dans un laboratoire. S'il est diffusé, il se propagera d'un individu à un autre et ceci indéfiniment.
Mais, pour que toute la terre soit contaminée, il faut d'abord qu'il contamine une première personne.

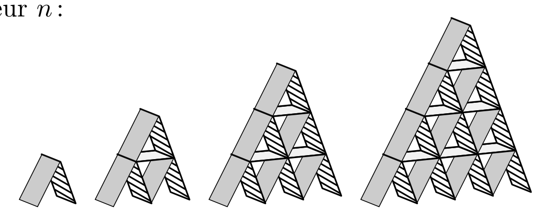
2. Propriétés indexées par n:

On s'intéresse à des "*suites*" de propriétés indexées par n:

- Pour tout entier naturel n, on définit la propriété $\mathcal{P}_n$ par:

$$\mathcal{P}_n:\quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

- Pour tout entier n, on construit une pyramide de hauteur n:



On considère la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier n naturel non-nul:

$\mathcal{Q}_n$: "*un chateau à n étages à $\dfrac{3\cdot n^2+n}{2}$ cartes*"

- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$u_0=2\quad;\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot u_n+\frac{1}{2}$$

On considère la propriété $\mathcal{R}_n$ définie pour tout entier naturel n par:
$\mathcal{R}_n$: "$u_n>1$"

Remarque:

Toutes les propriétés ci-dessous sont vraies pour toutes les valeurs de n associées.

Nous montrerons qu'elles sont définies pour toutes valeurs de n où elles sont définies à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

3. Une relation à un rang donné:

- La propriété $\mathcal{P}_n$ s'écrit:
  - $\mathcal{P}_1$: $\quad 1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$
  - $\mathcal{P}_2$: $\quad 1+2=\dfrac{2\cdot(2+1)}{2}$
  - $\mathcal{P}_3$: $\quad 1+2+3=\dfrac{3\cdot(3+1)}{2}$
  - $\mathcal{P}_n$: $\quad 1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$
  - $\mathcal{P}_{n+1}$: $\quad 1+2+3+\cdots+(n+1)=\dfrac{(n+1)\cdot\big[(n+1)+1\big]}{2}$
    qui s'exprime également par:
    $$1+2+3+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$
- La propriété Q_{n+1} s'exprime par:

"*un chateau à $(n+1)$ étages à $\dfrac{3\cdot(n+1)^2+(n+1)}{2}$ cartes*"
qui s'exprime aussi:
"*un chateau à $(n+1)$ étages à $\dfrac{3n^2+7n+4}{2}$ cartes*"

4. Propriété héréditaire:

Une propriété est héréditaire si lorsqu'une propriété est vraie pour un rang donnée entraine que la propriété au rang suivant reste vraie:

- Montrons que la propriété $\mathcal{P}_3$ est héréditaire sur $\mathcal{P}_4$:

$$1+2+3=\frac{3\cdot(3+1)}{2}$$
$$1+2+3+4=\frac{3\cdot(3+1)}{2}+4$$
$$1+2+3+4=\frac{20}{2}$$
$$1+2+3+4=\frac{4\times(4+1)}{2}$$

Ce raisonnement permet de montrer que la propriété $\mathcal{P}_3$ se transmet à $\mathcal{P}_4$:
$\mathcal{P}_3\Longrightarrow\mathcal{P}_4$

- Montrons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire sur $\mathcal{P}_{n+1}$:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$
$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)$$
$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2}$$
$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n^2+3\cdot n+2}{2}$$

On remarque le développement: $(n+1)(n+2)=n^2+3\cdot n+2$

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On vient de montrer que $\mathcal{P}_n\Longrightarrow\mathcal{P}_{n+1}$

B. Récurrence:

1. Définition et exemples :

Définition : *(Principe de récurrence)*

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si :

- **Initialisation :** la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** si pour tout entier naturel n quelconque, on a la relation :
  $\mathcal{P}_n$ vraie $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

alors la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n

Exemple :

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par les relations :

$$u_0 = 7 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}\cdot u_n + \frac{3}{2}$$

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n \geqslant 2$"

Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n :

- **Initialisation :**
  On a : $u_0 = 7 \geqslant 2$

  Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a $u_n \geqslant 2$

  Ainsi, on a la comparaison :

  $$\begin{aligned} u_n &\geqslant 2 \\ \frac{1}{4}\cdot u_n &\geqslant \frac{1}{4}\times 2 \\ \frac{1}{4}\cdot u_n &\geqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\cdot u_n + \frac{3}{2} &\geqslant \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ u_{n+1} &\geqslant \frac{4}{2} \\ u_{n+1} &\geqslant 2 \end{aligned}$$

  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.

- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$2\cdot u_n = 5^{n+2} + 3$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  On a :

  $2\cdot u_0 = 28 \quad ; \quad 5^{0+2} + 3 = 25 + 3 = 28$

  On vient d'établir l'égalité : $2\cdot u_0 = 5^{0+2} + 3$

  La relation $\mathcal{P}_0$ est établie.

- **Hérédité :**
  Supposons que, pour un entier naturel n quelconque, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. C'est à dire qu'on a la relation :

  $2\cdot u_n = 5^{n+2} + 3$

  D'après la définition de la suite (u_n), le terme de rang $(n+1)$ admet pour expression :

  $u_{n+1} = 5\cdot u_n - 6$

  On en déduit l'égalité :

  $2\cdot u_{n+1} = 2\cdot\big(5\cdot u_n - 6\big) = 5\cdot\big(2\cdot u_n\big) - 12$

  En utilisant la propriété $\mathcal{P}_n$, on a :

  $2\cdot u_{n+1} = 5\cdot\big(5^{n+2} + 3\big) - 12 = 5^{n+2+1} + 15 - 12$

  $2\cdot u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$

  Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

Pour montrer que la suite (u_n) est strictementdécroissante, on considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie sur tout entier naturel n par :

$u_{n+1} < u_n$

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel :

- **Initialisation :**
  On a : $u_0 = 5 \quad ; \quad u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{5} \simeq 2{,}2$
  Ainsi, on a : $u_1 < u_0$

  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est-à-dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :

  $u_{n+1} < u_n$

  Partons de la comparaison :

  $u_{n+1} < u_n$

  La fonction racine carrée est strictement croissante :

  $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$

  $u_{n+2} < u_{n+1}$

  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. Récurrence d'ordre 2 :

Définition :

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ telle que :

- $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies

- et que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ la réalisation de $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ entraine la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

alors la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple :

Enoncé :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = 4 \cdot u_n - 4 \cdot u_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que les termes de la suite (u_n) admettent pour expression :

$$u_n = n \cdot 2^n$$

Correction :

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$\mathcal{P}_n : \text{ “}u_n = n \cdot 2^n\text{”}$$

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réaslisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**

  On a : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ 0 \times 2^0 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} u_1 = 2 \\ 1 \times 2^1 = 2 \end{cases}$

  On vient d'établir que les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ a été vérifiée jusqu'au rang n entier naturel quelconque. C'est à dire, notamment qu'on peut utiliser les propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ comme hypothèse de récurrence :

  $$u_{n-1} = (n-1) \cdot 2^{n-1} \quad ; \quad u_n = n \cdot 2^n$$

  Par définition de la suite (u_n), le terme de rang $n+1$ s'exprime par :

  $$u_{n+1} = 4 \cdot u_n - 4 \cdot u_{n-1} = 4 \cdot \big(n \cdot 2^n\big) - 4 \cdot \big[(n-1) \cdot 2^{n-1}\big]$$
  $$= 2^2 \cdot n \cdot 2^n - 2^2 \cdot (n-1) \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot n \cdot 2^{n+1} - (n-1) \cdot 2^{n+1}$$
  $$= \big[2 \cdot n - (n-1)\big] \cdot 2^{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1}$$

  On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.