Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul par :

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{“}\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\ \text{”}$$

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul par :

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{“ } 1+2+3+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \text{ ”}$$

La propriété $\mathcal{P}_3$ s'exprime par : $\quad 1+2+3 = \dfrac{3\cdot(3+1)}{2}$

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul par :

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{“}\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}\ \text{”}$$

La propriété $\mathcal{P}_3$ s'exprime par : $\quad 1 + 2 + 3 = \dfrac{3 \cdot (3+1)}{2}$

Or, on a :

- $1 + 2 + 3$
- $\dfrac{3 \cdot (3+1)}{2}$

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul par :

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{“ } 1+2+3+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \text{ ”}$$

La propriété $\mathcal{P}_3$ s'exprime par : $\quad 1+2+3 = \dfrac{3\cdot(3+1)}{2}$

Or, on a :

- $1+2+3 = 6$
- $\dfrac{3\cdot(3+1)}{2} = \dfrac{3\times 4}{2} = 3\times 2 = 6$

La propriété $\mathcal{P}_3$ est vraie

On veut montrer que le fait que $\mathcal{P}_3$ est vraie entraine que $\mathcal{P}_4$ est vraie : $\quad \mathcal{P}_3 \Longrightarrow \mathcal{P}_4$

On sait que :

$\mathcal{P}_3$ est vraie

$\Longrightarrow \quad \mathcal{P}_4$ est vraie

On veut montrer que le fait que $\mathcal{P}_3$ est vraie entraine que $\mathcal{P}_4$ est vraie : $\mathcal{P}_3 \Longrightarrow \mathcal{P}_4$

On sait que :

$\mathcal{P}_3$ est vraie $\Longrightarrow$ $1+2+3 = \dfrac{3\cdot(3+1)}{2}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_4$ est vraie

On veut montrer que le fait que $\mathcal{P}_3$ est vraie entraine que $\mathcal{P}_4$ est vraie : $\quad \mathcal{P}_3 \Longrightarrow \mathcal{P}_4$

On sait que :

$$\mathcal{P}_3 \text{ est vraie} \quad \Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3\cdot(3+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_4 \text{ est vraie}$$

On veut montrer que le fait que $\mathcal{P}_3$ est vraie entraine que $\mathcal{P}_4$ est vraie : $\mathcal{P}_3 \Longrightarrow \mathcal{P}_4$

On sait que :

$$\mathcal{P}_3 \text{ est vraie} \quad \Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3\cdot(3+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} + 4$$

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_4 \text{ est vraie}$$

On veut montrer que le fait que $\mathcal{P}_3$ est vraie entraine que $\mathcal{P}_4$ est vraie : $\mathcal{P}_3 \Longrightarrow \mathcal{P}_4$

On sait que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_3 \text{ est vraie} \quad &\Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3{\cdot}(3+1)}{2} \\
&\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{3{\cdot}(3+1)}{2} + 4 \\
&\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{3{\cdot}(3+1){\color{red}+2\times 4}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4{\cdot}(4+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_4 \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

On veut montrer que le fait que $\mathcal{P}_3$ est vraie entraine que $\mathcal{P}_4$ est vraie : $\quad \mathcal{P}_3 \Longrightarrow \mathcal{P}_4$

On sait que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_3 \text{ est vraie} \quad &\Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} \\
&\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} + 4 \\
&\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)+2\times 4}{2} \\
&\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{3\times \color{red}{4} + 2\times 4}{2} \\
&\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_4 \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

On veut montrer que le fait que $\mathcal{P}_3$ est vraie entraine que $\mathcal{P}_4$ est vraie : $\quad \mathcal{P}_3 \Longrightarrow \mathcal{P}_4$

On sait que :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_3 \text{ est vraie} \quad & \Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} \\
& \Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} + 4 \\
& \Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)+2\times 4}{2} \\
& \Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{3\times 4 + 2\times 4}{2} \\
& \Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(3+2)}{2} \\
& \Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_4 \text{ est vraie}
\end{aligned}
$$

On veut montrer que le fait que $\mathcal{P}_3$ est vraie entraine que $\mathcal{P}_4$ est vraie : $\mathcal{P}_3 \Longrightarrow \mathcal{P}_4$

On sait que :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_3 \text{ est vraie} &\Longrightarrow & 1+2+3 &= \frac{3\cdot(3+1)}{2} \\
&\Longrightarrow & 1+2+3+4 &= \frac{3\cdot(3+1)}{2}+4 \\
&\Longrightarrow & 1+2+3+4 &= \frac{3\cdot(3+1)+2\times4}{2} \\
&\Longrightarrow & 1+2+3+4 &= \frac{3\times4+2\times4}{2} \\
&\Longrightarrow & 1+2+3+4 &= \frac{4\cdot(3+2)}{2} \\
&\Longrightarrow & 1+2+3+4 &= \frac{4\cdot(4+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_4 \text{ est vraie}
\end{aligned}
$$

Montrons que : $\mathcal{P}_4 \Longrightarrow \mathcal{P}_5$

$\mathcal{P}_3$ est vraie	$\mathcal{P}_4$ est vraie
$\Longrightarrow \quad 1+2+3 = \dfrac{3{\cdot}(3+1)}{2}$	$\Longrightarrow$
$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \dfrac{3{\cdot}(3+1)}{2} + 4$	$\Longrightarrow$
$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \dfrac{3{\cdot}(3+1)+2\times 4}{2}$	$\Longrightarrow$
$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \dfrac{3\times 4+2\times 4}{2}$	$\Longrightarrow$
$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \dfrac{4{\cdot}(3+2)}{2}$	$\Longrightarrow$
$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \dfrac{4{\cdot}(4+1)}{2}$	$\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \quad \mathcal{P}_4$ est vraie	$\Longrightarrow \qquad \mathcal{P}_5$ est vraie

Montrons que : $\mathcal{P}_4 \Longrightarrow \mathcal{P}_5$

$\mathcal{P}_3$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3{\cdot}(3+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3{\cdot}(3+1)}{2} + 4$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3{\cdot}(3+1)+2\times4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\times4+2\times4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4{\cdot}(3+2)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4{\cdot}(4+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_4$ est vraie

$\mathcal{P}_4$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4{\cdot}(4+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4+5 = \frac{5{\cdot}(5+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_5$ est vraie

Montrons que : $\mathcal{P}_4 \Longrightarrow \mathcal{P}_5$

$\mathcal{P}_3$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3\cdot(3+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} + 4$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)+2\times 4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\times 4+2\times 4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(3+2)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_4$ est vraie

$\mathcal{P}_4$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4+5 = \frac{4\cdot(4+1)}{2} + 5$$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4+5 = \frac{5\cdot(5+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_5$ est vraie

Montrons que : $\mathcal{P}_4 \Longrightarrow \mathcal{P}_5$

$\mathcal{P}_3$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3\cdot(3+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} + 4$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1) + 2\times 4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\times 4 + 2\times 4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(3+2)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_4$ est vraie

$\mathcal{P}_4$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{4\cdot(4+1)}{2} + 5$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{4\cdot(4+1) + 2\times 5}{2}$$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{5\cdot(5+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_5$ est vraie

Montrons que : $\mathcal{P}_4 \Longrightarrow \mathcal{P}_5$

$\mathcal{P}_3$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3\cdot(3+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} + 4$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)+2\times 4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\times 4 + 2\times 4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(3+2)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_4$ est vraie

$\mathcal{P}_4$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{4\cdot(4+1)}{2} + 5$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{4\cdot(4+1)+2\times 5}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{4\times 5 + 2\times 5}{2}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{5\cdot(5+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_5$ est vraie

Montrons que : $\mathcal{P}_4 \Longrightarrow \mathcal{P}_5$

$\mathcal{P}_3$ est vraie

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad 1+2+3 &= \frac{3\cdot(3+1)}{2} \\
\Longrightarrow 1+2+3+4 &= \frac{3\cdot(3+1)}{2} + 4 \\
\Longrightarrow 1+2+3+4 &= \frac{3\cdot(3+1)+2\times 4}{2} \\
\Longrightarrow 1+2+3+4 &= \frac{3\times 4+2\times 4}{2} \\
\Longrightarrow 1+2+3+4 &= \frac{\color{red}{4}\cdot(3+2)}{2} \\
\Longrightarrow 1+2+3+4 &= \frac{4\cdot(4+1)}{2}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \mathcal{P}_4$ est vraie

$\mathcal{P}_4$ est vraie

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 &= \frac{4\cdot(4+1)}{2} \\
\Longrightarrow 1+2+3+4+5 &= \frac{4\cdot(4+1)}{2} + 5 \\
\Longrightarrow 1+2+3+4+5 &= \frac{4\cdot(4+1)+2\times 5}{2} \\
\Longrightarrow 1+2+3+4+5 &= \frac{4\times 5+2\times 5}{2} \\
\Longrightarrow 1+2+3+4+5 &= \frac{\color{red}{5}\cdot(4+2)}{2} \\
\Longrightarrow 1+2+3+4+5 &= \frac{5\cdot(5+1)}{2}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \mathcal{P}_5$ est vraie

Montrons que : $\mathcal{P}_4 \Longrightarrow \mathcal{P}_5$

$\mathcal{P}_3$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3 = \frac{3\cdot(3+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} + 4$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\cdot(3+1)+2\times 4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{3\times 4+2\times 4}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(3+2)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_4$ est vraie

$\mathcal{P}_4$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+3+4 = \frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{4\cdot(4+1)}{2} + 5$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{4\cdot(4+1)+2\times 5}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{4\times 5+2\times 5}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{5\cdot(4+2)}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+5 = \frac{5\cdot(5+1)}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_5$ est vraie

De manière générale, montrons que :

$\mathcal{P}_n$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}$$

De manière générale, montrons que :

$\mathcal{P}_n$ est vraie

$$\implies \quad 1+2+\cdots+n \qquad\qquad = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\implies \quad 1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]}{2}$$

$\implies \quad \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

De manière générale, montrons que :

$\mathcal{P}_n$ est vraie

$$\Longrightarrow \quad 1+2+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad 1+2+\cdots+n+\color{red}{(n+1)} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}+\color{red}{(n+1)}$$

$$\Longrightarrow \quad 1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]}{2}$$

$\Longrightarrow \quad \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

De manière générale, montrons que :

$\mathcal{P}_n$ est vraie

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & 1+2+\cdots+n &&= \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\
\Longrightarrow \quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &&= \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1) \\
\Longrightarrow \quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &&= \frac{n\cdot(n+1)+{\color{red}2\times(n+1)}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) = \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]}{2} \\
\Longrightarrow \quad & \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

De manière générale, montrons que :

$\mathcal{P}_n$ est vraie

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & 1+2+\cdots+n &&= \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\
\Longrightarrow \quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &&= \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1) \\
\Longrightarrow \quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &&= \frac{n\cdot(n+1)+2\times(n+1)}{2} \\
\Longrightarrow \quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &&= \frac{{\color{red}(n+1)}\cdot(n+2)}{2} \\
\Longrightarrow \quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &&= \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]}{2}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

De manière générale, montrons que :

$\mathcal{P}_n$ est vraie

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & 1+2+\cdots+n && = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\
\Longrightarrow\quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) && = \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1) \\
\Longrightarrow\quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) && = \frac{n\cdot(n+1)+2\times(n+1)}{2} \\
\Longrightarrow\quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) && = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} \\
\Longrightarrow\quad & 1+2+\cdots+n+(n{+}1) && = \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]}{2} \\
\Longrightarrow\quad & \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}
\end{aligned}
$$

De manière générale, montrons que :

$\mathcal{P}_n$ est vraie

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad 1+2+\cdots+n &= \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\
\Longrightarrow \quad 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &= \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1) \\
\Longrightarrow \quad 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &= \frac{n\cdot(n+1)+2\times(n+1)}{2} \\
\Longrightarrow \quad 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} \\
\Longrightarrow \quad 1+2+\cdots+n+(n{+}1) &= \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]}{2}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

La propriété d'hérédité est vérifiée par les propriétés $\mathcal{P}_n$