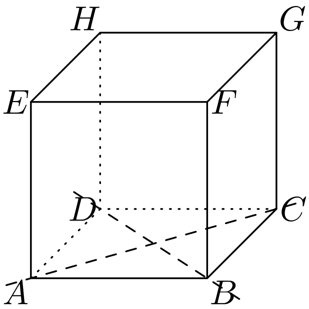
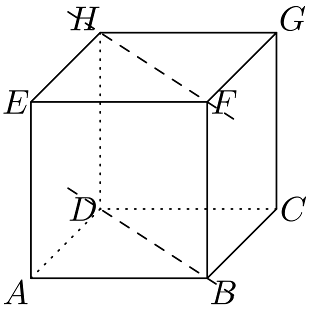
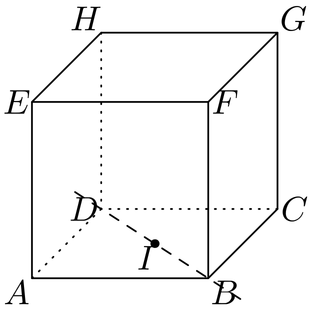
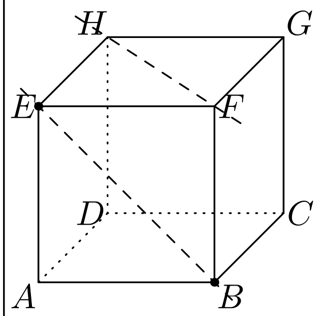
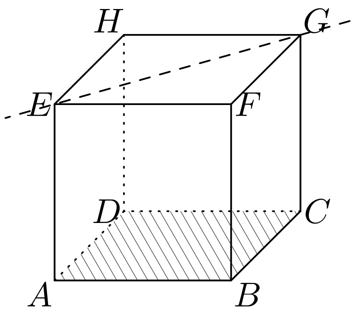
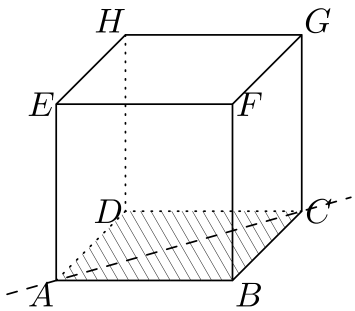
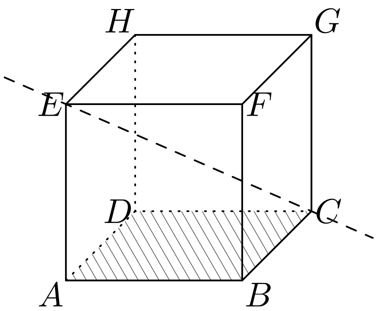
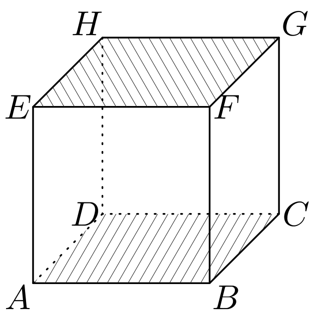
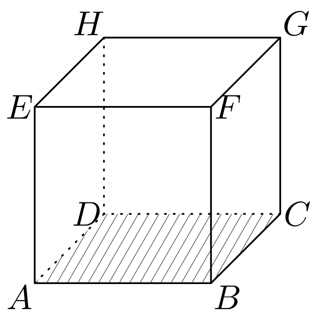
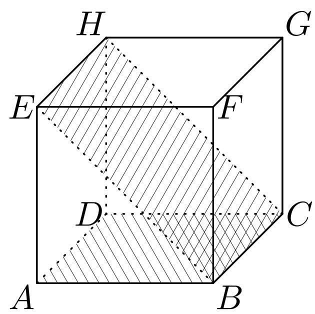
Géométrie dans l'espace

A. Position relative:

Droites coplanaires			Droites non-coplanaires
 (HF) et (BE) sont sécantes	 (DB) et (HF) sont strictement parallèles	 (DB) et (DI) sont confondues	 (DB) et (AC) sont non-coplanaires

Droite et plan parallèles		Droite et plan sécants
 (EG) et (ABC) sont strictement parallèles	 (AC) et (ABC) sont confondus	 (EC) et (ABC) sont sécants

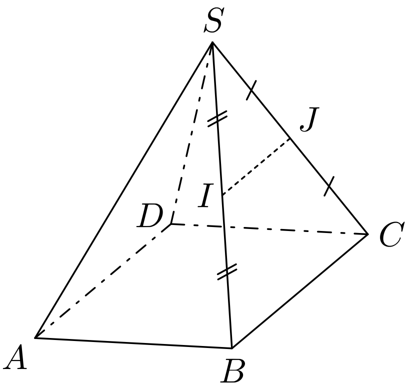
Plans parallèles		Plans non-sécants
 (ABC) et (FEH) sont strictement parallèles	 (ABC) et (BAD) sont confondus	 (EBC) et (ABC) sont sécants

B. Parallélisme:

Proposition :

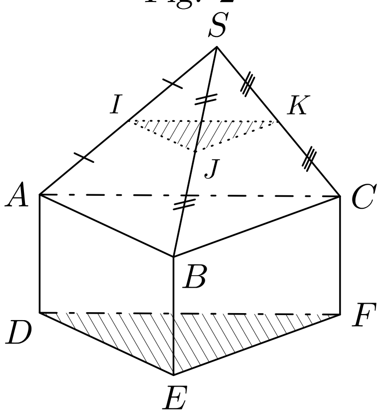
- Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles. *(Fig. 1)*
- Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux. *(Fig. 2)*
- Une droite est parallèle à un plan si, et seulement si, elle est parallèle à une droite de ce plan. *(Fig. 3)*

Fig. 1



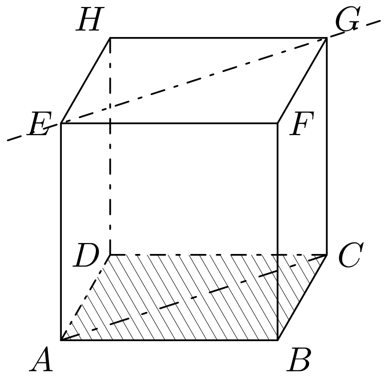
$(AD)/\!/(IJ)$

Fig. 2



$(IJK)/\!/(DEF)$

Fig. 3



$(EG)/\!/(ABC)$

Proposition :

- Deux plans sont parallèles si, et seulement si, il existe deux droites sécantes du premier plan parallèles à deux droites du second plan. *(Fig. 4)*
- Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles. *(Théorème d'incidence - Fig. 5)*
- Dans l'espace, on considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ contenant respectivement les droites (d_1) et (d_2) parallèles entre elles.

  Si les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants entre eux alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans. *Théorème du toit - Fig. 6)*

Fig. 4

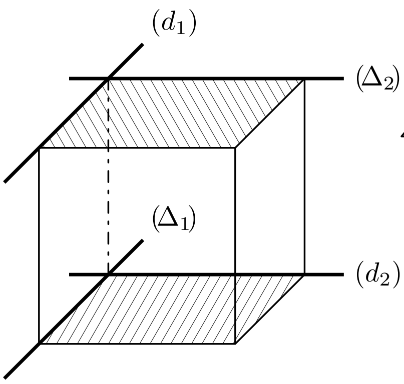
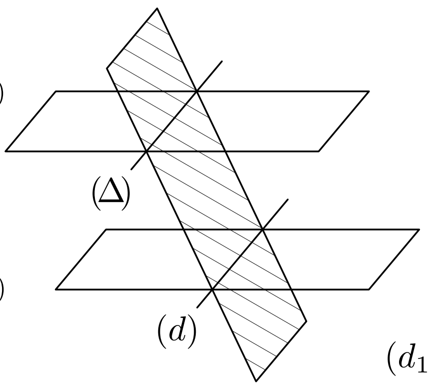
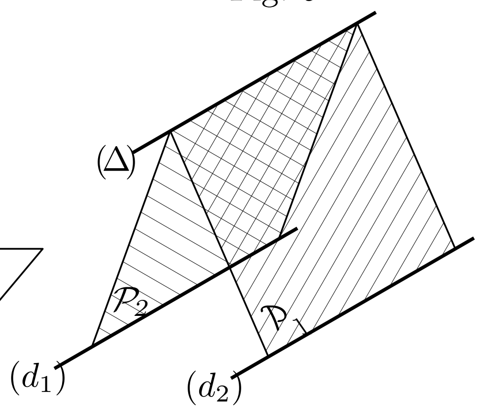


Fig. 5



$(d)/\!/(\Delta)$

Fig. 6



$(\Delta)/\!/(d_1)$ et $(\Delta)/\!/(d_2)$

C. Droites et orthogonalité:

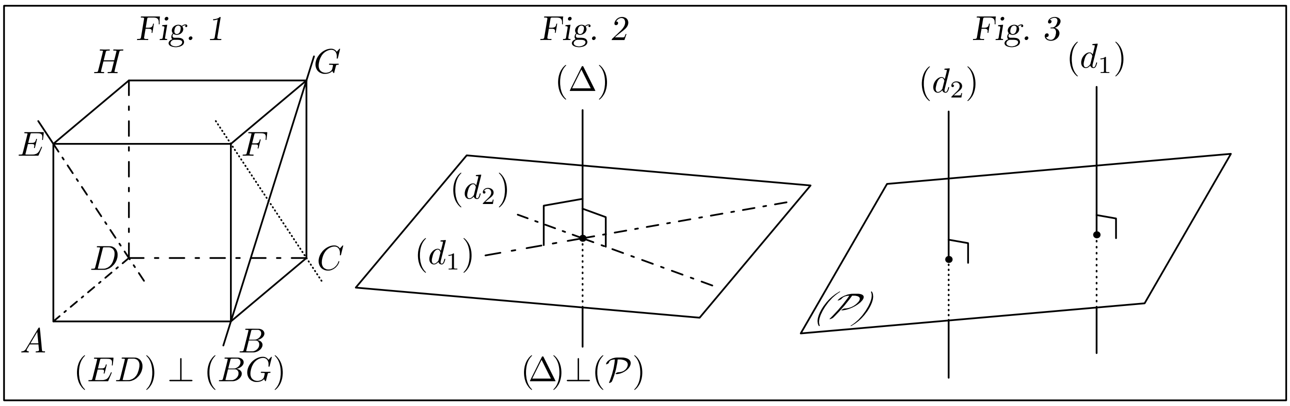
Définition :

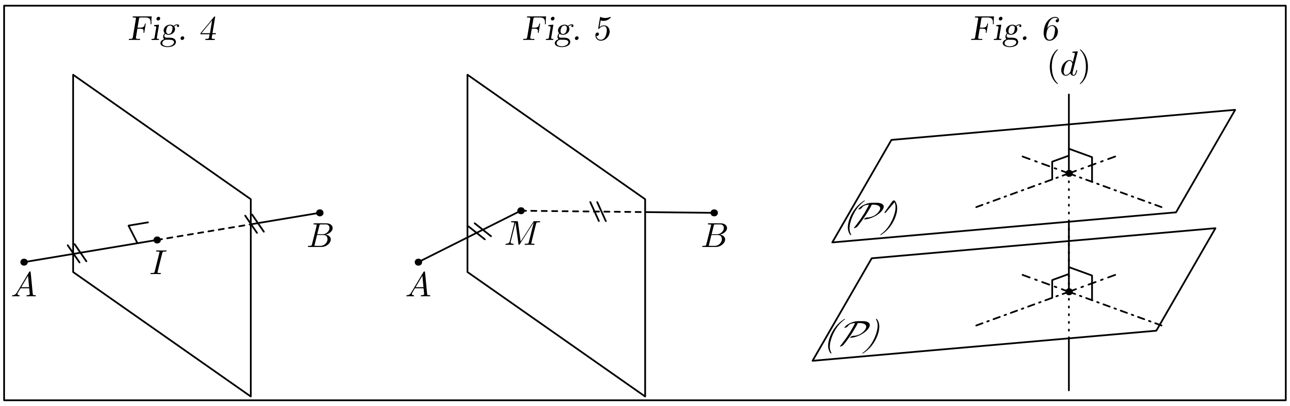
- Dans l'espace, deux droites sont dites orthogonales si leurs parallèles passant par un même point de l'espace sont perpendiculaires *(Fig. 1)*.
- Dans l'espace, une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
- Soit A et B deux points. On appelle plan médian du segment $[AB]$, l'unique plan passant par le milieu de $[AB]$ et orthogonal à la droite (AB) *(Fig. 4)*.

Proposition :

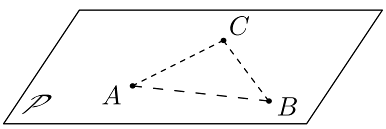
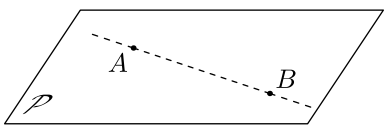
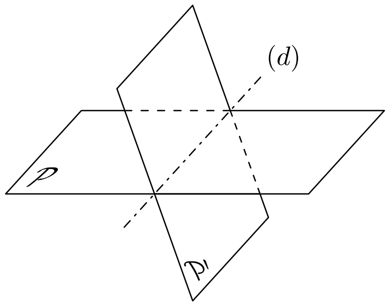
- Si une droite (Δ) est orthogonale à deux droites (d_1) et (d_2) sécantes d'un plan $(\mathcal{P})$ alors elle est orthogonale à toutes les droites du plan $(\mathcal{P})$ *(Fig. 2)*.

- Si deux droites sont orthogonales à un même plan $(\mathcal{P})$ alors elles sont parallèles entre elles *(Fig. 3)*
- Si deux droites sont parallèles entre elles et si l'une d'elle est orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$ alors l'autre est aussi orthogonale au plan $\mathcal{P}$ *(Fig. 3)*
- Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistant des extrémités A et B *(Fig. 5)*
- Si deux plans sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonal à l'autre *(Fig. 6)*.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux *(Fig. 6)*.





D. Autres remarques:

Par trois points non-alignés passent un unique plan	Si A et B sont deux points distincts du plan $\mathcal{P}$, la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{P}$	L'intersection de deux plans sécants est une droite
		

Proposition :

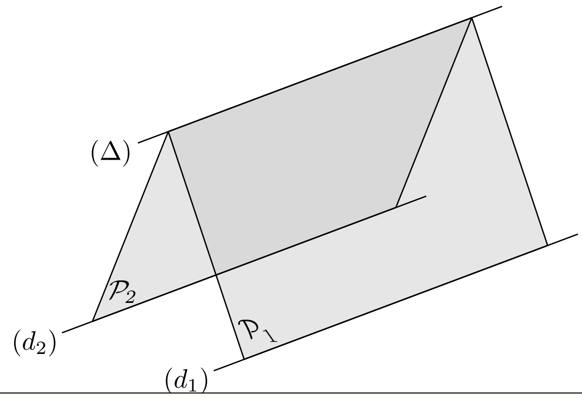
- Dans un plan de l'espace, tous les théorèmes de la géométrie du plan s'appliquent
- Deux droites parallelees de l'espace sont coplanaires

E. Théorème du toit:

Théorème :

Dans l'espace, on considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ contenant respectivement les droites (d_1) et (d_2) parallèles entre elles.

Si les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants entre eux alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.



Preuve :

Les droites (d_1) et (d_2) étant parallèles, deux positions relatives sont possibles :

- **(d_1) et (d_2) sont parallèles et confondues :**
  Les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ étant sécants, leur intersection est une droite.
  Les droites (d_1) et (d_2) étant confondues, elles forment l'intersection de ces deux plans : les droites (d_1), (d_2) et (Δ) sont toutes confondues.
  Ainsi, on a : $(\Delta)/\!\!/(d_1)$ et $(\Delta)/\!\!/(d_2)$

- **(d_1) et (d_2) sont strictement parallèles :**
  En raisonnant par l'absurde, supposons que (Δ) n'est pas parallèle à au moins une des deux droites (d_1) et (d_2). Choisissons (d_1) par exemple.

  > **Supposons que (Δ) et (d_1) ne sont pas parallèles**.
  > (Δ) étant la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$, on en déduit que les droites (Δ) et (d_1) sont coplanaires. Etant non-parallèles, on en déduit qu'elles sont sécantes : notons M le point d'intersection des droites (Δ) et (d_1).
  >
  > La droite (d_2) est incluse dans le plan $(\mathcal{P}_2)$.
  > La droite (d_1) passe par le point M, appartenant également à $(\mathcal{P}_2)$, et est parallèle à (d_2) : la droite (d_1) est incluse dans le plan $(\mathcal{P}_2)$.
  >
  > La droite (d_1) est incluse dans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$: elle appartient à l'intersection de ces deux plans. Or, l'intersection de deux plans étant une droite, on en déduit que (d_1) et (Δ) sont confondues.
  >
  > On arrive à l'absurdité : (d_1) **et** (Δ) **sont parallèles confondues.**

  La droite (Δ) ne pouvant être non-parallèle à au moins une des deux droites (d_1) et (d_2), on en déduit que (Δ) est parallèle à ces deux droites.

