Proposition :

Soit α un nombre réel.

- L'équation $\cos x = \cos\alpha$ a pour ensemble de solutions :
  $x = \alpha + 2\cdot k\cdot\pi \quad ; \quad x = -\alpha + 2\cdot k'\cdot\pi$
  pour tout entier relatif k et k'.
- L'équation $\sin x = \sin\alpha$ a pour ensemble de solutions :
  $x = \alpha + 2\cdot k\cdot\pi \quad ; \quad x = \pi - \alpha + 2\cdot k'\cdot\pi$
  pour tout entier relatif k et k'.

Remarque :

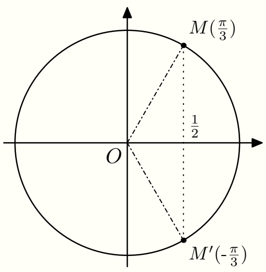
L'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ admet un infinité de solution.
Il est évident que $\frac{\pi}{3}$ est une solution, alors directement les nombres réels suivants sont aussi des solutions :
$\frac{\pi}{3}+2\cdot\pi \quad ; \quad \frac{\pi}{3}+4\cdot\pi \quad ; \quad \frac{\pi}{3}+6\cdot\pi \quad ; \quad \dots$
Il est ainsi clair que cette équation admet une infinité de solutions qu'on peut noter :
$$\left\{\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exemple :

- Résolvons l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$



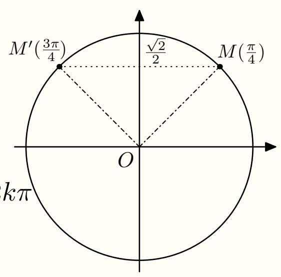
On en déduit :
$x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$
Dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales, on a :
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{3}\right\}$

- Résolvons l'équation $\sin x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\sin x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin x = \sin\dfrac{\pi}{4}$



On en déduit :
$x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$
$x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$
Dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$, les solutions sont :
$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

- Résolvons l'équation $\cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{3}$

On en déduit :

$2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$	$2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$
$x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$	$x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$
$x \in \left\{...-\frac{11\pi}{6}\,;-\frac{5\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}...\right\}$	$x \in \left\{...-\frac{7\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}...\right\}$

Les solutions dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ sont :
$S = \left\{-\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$

Proposition :

Soit α un nombre réel.

- L'équation $\cos x = \cos\alpha$ a pour ensemble de solutions :
  $x = \alpha + 2\cdot k\cdot\pi \quad ; \quad x = -\alpha + 2\cdot k'\cdot\pi$
  pour tout entier relatif k et k'.
- L'équation $\sin x = \sin\alpha$ a pour ensemble de solutions :
  $x = \alpha + 2\cdot k\cdot\pi \quad ; \quad x = \pi - \alpha + 2\cdot k'\cdot\pi$
  pour tout entier relatif k et k'.

Remarque :

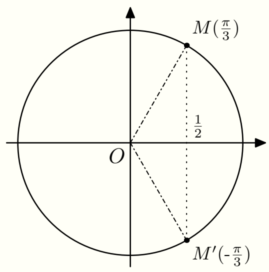
L'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ admet un infinité de solution.
Il est évident que $\frac{\pi}{3}$ est une solution, alors directement les nombres réels suivants sont aussi des solutions :
$\frac{\pi}{3}+2\cdot\pi \quad ; \quad \frac{\pi}{3}+4\cdot\pi \quad ; \quad \frac{\pi}{3}+6\cdot\pi \quad ; \quad \dots$
Il est ainsi clair que cette équation admet une infinité de solutions qu'on peut noter :
$$\left\{\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exemple :

- Résolvons l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$



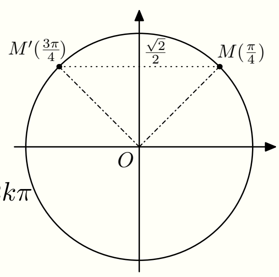
On en déduit :
$x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$
Dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales, on a :
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{3}\right\}$

- Résolvons l'équation $\sin x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\sin x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin x = \sin\dfrac{\pi}{4}$



On en déduit :
$x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$
$x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$
Dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$, les solutions sont :
$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

- Résolvons l'équation $\cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{3}$

On en déduit :

$2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$	$2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$
$x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$	$x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$
$x \in \left\{...-\frac{11\pi}{6}\,;-\frac{5\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}...\right\}$	$x \in \left\{...-\frac{7\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}...\right\}$

Les solutions dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ sont :
$S = \left\{-\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$