La fonction exponentielle

A. Définition :

Définition : *(et propriété admise)*

On appelle fonction **exponentielle**, l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$f(0)=1 \quad ; \quad f'(x)=f(x) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}$

Remarque :

Ce n'est pas en donnant les propriétés d'un objet qu'on s'assure de son **existence** !

De plus, la définition précédente définit **la** fonction exponentielle. Il faut donc s'assurer qu'elle ne définit qu'un objet : nous allons rechercher l'**unicité** de la fonction réalisant ces propriétés

1. Existence :

Remarque :

L'existence est hors programme car sa démonstration fait intervenir beaucoup de points hors programme tels que :

- le passage à la limite dans des comparaisons
- les suites adjacentes *(qui reviennent au programme de spécialité terminale)*
- le théorème des accroissements finis *(dans le supérieur)*

Vous trouverez une démonstration de l'existence ici :

r175-0

2. Unicité :

Lemme :

L'unique fonction f vérifiant $f'=f$ et $f(0)=1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

On suppose donc l'existence de cette fonction f. On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est donnée par la formule :

$g(x)=f(x)\cdot f(-x)$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivable. La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée g' :

$g'(x)=f'(x)\cdot f(-x)+f(x)\cdot\big[-f'(-x)\big]$

$\quad =f'(x)\cdot f(-x)-f(x)\cdot f'(-x)$

De la propriété $f'=f$, on déduit :

$\quad =f(x)\cdot f(-x)-f(x)\cdot f(-x)=0$

La fonction g est donc constante. En remarquant que :

$g(0)=f(0)\cdot f(-0)=1\times 1=1$

On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$g(x)=1$

On vient de montrer que le produit $f(x)\cdot f(-x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$: le facteur $f(x)$ ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.

Proposition :

Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$f'=f$ et $f(0)=1$

Preuve :

- L'existence d'une telle fonction est admise.
- Pour montrer qu'il existe une unique fonction réalisant ces deux conditions, procédons au raisonnement par l'absurde suivant :

  "*Supposons qu'il existe deux fonctions réalisant f et g distinctes réalisant ces deux conditions.*"

  La fonction g vérifiant les conditions recherchées, le lemme permet d'affirmer que le quotient $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Considérons la fonction h définie par :

  $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

  La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables. La formule de dérivation des quotients permet d'obtenir l'expression de la fonction h :

  $h'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\big[g(x)\big]^2}$

  Les propriétés de f et g permettent d'écrire :

  $h'(x)=\dfrac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{\big[g(x)\big]^2}=\dfrac{0}{\big[g(x)\big]^2}=0$

  La dérivée de la fonction h étant nulle, on en déduit que la fonction h est constante et on a :

  $h(0)=\dfrac{f(0)}{g(0)}=\dfrac{1}{1}=1$

  On en déduit que pour tout nombre $x\in\mathbb{R}$, on a :

  $h(x)=1 \implies \dfrac{f(x)}{g(x)}=1 \implies f(x)=g(x)$

  On vient de montrer que ces deux fonctions coïncident sur $\mathbb{R}$: ces deux fonctions sont égales.

3. Représentation graphique :

Remarque :

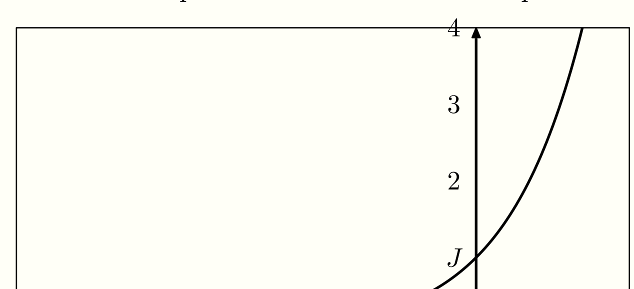
En considérant la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ de la fonction exponentielle dans un repère, la définition de cette fonction permet d'affirmer :

- $f(0)=1$: la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ passe par le point $A(0\,;1)$
- $\big(\exp\big)'=\exp$: la connaissance du nombre dérivée pour chaque nombre permet de connaitre l'orientation de la tangente en chaque point de la courbe : r432-0

La méthode d'Euler utilise le champs des tangentes créé par la relation $\big(\exp\big)'=\exp$ et crée une approximation de la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ en utilisant un pas de tracer : r558-0

Remarque :

Voici la courbe représentative de la fonction exponentielle :



B. Formule algébrique :

Proposition :

Pour tout réel x, on a :

- $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x)>0$

Preuve :

On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est donnée par la formule :

$g(x)=\exp(x)\cdot\exp(-x)$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivable. La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée g' :

$g'(x)=\exp'(x)\cdot\exp(-x)+\exp(x)\cdot\big[-\exp'(-x)\big]$

$\quad =\exp'(x)\cdot\exp(-x)-\exp(x)\cdot\exp'(-x)$

De la propriété $\exp'=\exp$, on déduit :

$\quad =\exp(x)\cdot\exp(-x)-\exp(x)\cdot\exp(-x)=0$

La fonction g est donc constante. En remarquant que :

$g(0)=\exp(0)\cdot\exp(-0)=1\times 1=1$

On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$g(x)=1$

On vient de montrer que :

- le produit $\exp(x)\cdot\exp(-x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$: le facteur $\exp(x)$ ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.
- Plus précisemment, la fonction g est constante et égale à 1 :

  $g(x)=1$

  $\exp(x)\cdot\exp(-x)=1$

  $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

Proposition :

Pour tous nombres réels x et y, on a :

- $\exp\big(x+y\big)=\exp(x)\times\exp(y)$
- $\exp\big(x-y\big)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- Pour tout entier relatif n : $\exp(n\cdot x)=\big[\exp(x)\big]^n$

Preuve :

- Soit a un réel quelconque. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $f(x)=\exp(x+a)\cdot\exp(-x)$ La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

  $f'(x)=\exp'(x+a)\cdot\exp(-x)+\exp(x+a)\cdot\big[-\exp'(-x)\big]$

  $\quad =\exp(x+a)\cdot\exp(-x)-\exp(x+a)\cdot\exp(-x)=0$

  On en déduit que la fonction f est une fonction constante. De plus, on a :

  $f(0)=\exp(0+a)\cdot\exp(-0)=\exp(a)\cdot 1=\exp(a)$

  Ainsi, la fonction f vérifie pour tout $x\in\mathbb{R}$:

  $f(x)=\exp(a)$

  $\exp(x+a)\cdot\exp(-x)=\exp(a)$

  $\exp(x+a)\cdot\dfrac{1}{\exp(x)}=\exp(a)$

  $\exp(x+a)\cdot=\exp(a)\cdot\exp(x)$

- On a la relation suivante :

  $\exp(x-y)=\exp\big[x+(-y)\big]=\exp(x)\cdot\exp(-y)$

  $\quad =\exp(x)\cdot\dfrac{1}{\exp(y)}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

- La vrai démonstration se fait par un raisonnement par récurrence. Mais voici une idée de la preuve :

  Nous allons utiliser plusieurs fois la propriété pour tout $x,\, y\in\mathbb{R}$:

  - $\exp(x)^2=\exp(x)\cdot\exp(x)=\exp(x+x)=\exp(2\cdot x)$
  - $\exp(x)^3=\big[\exp(x)\big]^2\cdot\exp(x)=\exp(2\cdot x)\cdot\exp(x)$
    $\quad =\exp(2\cdot x+x)=\exp(3\cdot x)$
  - $\exp(x)^4=\big[\exp(x)\big]^3\cdot\exp(x)=\exp(3\cdot x)\cdot\exp(x)$
    $\quad =\exp(3\cdot x+x)=\exp(4\cdot x)$
  - …

Remarque :

La vrai démonstration du 3ième point se fait par un raisonnement par récurrence qui sera vu en classe de terminale. En voici la démonstration :

r647-0

C. Notation :

Remarque :

On note **e** l'image du nombre 1 par la fonction exponentielle. Ainsi, par définition, on a : $\mathrm{e}=\exp(1)$

Les formules précédentes, permettent d'écrire pour tout entier relatif n :

$\exp(n)=\exp(1\cdot n)=\big[\exp(1)\big]^n=\mathrm{e}^n$

Par convention, on généralise cette écriture à tous les nombres réels x. C'est à dire qu'on définit le nombre e^x par :

$\mathrm{e}^x=\exp(x)$

Les propriétés précédemment établies s'expriment par :

- $\mathrm{e}^0=1$
- $\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$
- $\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{x-y}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\mathrm{e}^x=0$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$

D. Analyse :

1. Formule de dérivation :

Proposition :

Pour tout nombre x, on a :

- $\big[\mathrm{e}^x\big]'=\mathrm{e}^x$
- Pour tous nombres réels a et b : $\big[\mathrm{e}^{a\cdot x+b}\big]'=a\cdot\mathrm{e}^x$

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}'$
k	0	$\mathbb{R}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\exp x$	$\exp x$	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}'_f$
$u(a{\cdot}x+b)$	$a{\cdot}u'(a{\cdot}x+b)$	$\big\{x\in\mathbb{R}\big\vert a{\cdot}x+b\in I\big\}$
$\big[a{\cdot}x+b\big]^n$	$n\cdot a\cdot\big[a{\cdot}x+b\big]^{n-1}$	I
$\dfrac{1}{a{\cdot}x+b}$	$-\dfrac{a}{\big(a{\cdot}x+b\big)^2}$	$\big\{x\in I\ \big\vert\ u(x)\neq 0\big\}$
$\sqrt{a{\cdot}x+b}$	$\dfrac{a}{2{\cdot}\sqrt{a{\cdot}x+b}}$	$\big\{x\in\mathbb{R}\ \big\vert\ u(x)>0\big\}$
$\exp\big(a{\cdot}x+b\big)$	$a\cdot\exp\big(a{\cdot}x+b\big)$	I

Remarque :

Vous retrouverez ces deux tableaux avec les liens :

r581-0 r581-3

2. Sens de variation :

Proposition :

La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Raisonnons par l'absurde pour montrer cette assertion. Pour cela supposons :

> "*La fonction* exp *n'est pas strictement positive sur* $\mathbb{R}$. *C'est à dire qu'il existe au moins un nombre réel* a *tel que* $\exp(a)\leqslant 0$"

Ainsi, a est un nombre réel vérifiant $\exp(a)\leqslant 0$. Sachant que la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a déduit que le nombre a vérifie :

$$\exp(a)<0$$

On en déduit que $0\in\big[\exp(a)\,;1\big]$. Puisque :

- exp est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle continue sur $\mathbb{R}$;
- $\exp(0)=1$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un nombre b telle que :

$$\exp(b)=0$$

On aboutit à une contradiction car la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Proposition :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

La fonction exponentielle est strictement positive. Par définition, la fonction exponentielle vérifie la propriété $f'=f$. Ainsi, la fonction exponentielle admet une dérivée *(elle-même)* strictement positive, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante.

Proposition :

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet le tableau de vaiation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de exp	0	↗	1	↗	$+\infty$

Preuve :

La fonction exponentielle est strictement croissance sur $\mathbb{R}$.

Les limites aux bornes de l'ensemble $\mathbb{R}$ de définition de la fonction exponentielle sont démontrées dans le document :

r651-0

3. Egalité et comparaison :

Proposition :

Soit x et y deux nombres réels quelconques :

$$e^x=e^y\Longrightarrow x=y\quad;\quad e^x>e^y\Longrightarrow x>y$$

Preuve :

La stricte croissance de la fonction exponentielle permet d'établir ces propriétés :

- Raisonnons par l'absurde : supposons que les réels x et y vérifient : $e^x=e^y\ ;\ x\neq y$
  Comme x et y sont différent et jouent un rôle symétrique dans la proposition, supposons que x est plus grand que y. C'est à dire :
  $x>y$
  Par stricte croissance de la fonction exponentielle :
  $e^x>e^y$
  Ce qui contredit le fait que e^x est égal à e^y.
- Le second point est évident par définition de la stricte croissance d'une fonction.

E. Approfondissement :

1. Autres limites :

Proposition :

On a les trois limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\ ;\ \lim_{x\mapsto-\infty}x{\cdot}e^x=0\ ;\ \lim_{x\mapsto 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Preuve :

- On remarque l'égalité suivante :
  $$\Big(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\Big)^2=\frac{\big(e^{\frac{x}{2}}\big)^2}{\big(\sqrt{x}\big)^2}=\frac{e^{\frac{x}{2}\times 2}}{x}=\frac{e^x}{x}$$
  Nous avons établi, dans un lemme précédent, l'inégalité ci-dessous pour tout $u\in\mathbb{R}$:
  $e^u>u$
  En particulier pour $u=\dfrac{x}{2}$, on a :
  $e^{\frac{x}{2}}>\dfrac{x}{2}$
  $\sqrt{x}$ est un nombre positif :
  $$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}>\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x}}\qquad\Bigg|\qquad\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}>\frac{\sqrt{x}}{2}$$
  $$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}>\frac{x}{2{\cdot}\sqrt{x}}\qquad\Bigg|\qquad\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}>\frac{\sqrt{x}}{2}>0$$
  La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$:
  $$\Big(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\Big)^2>\Big(\frac{\sqrt{x}}{2}\Big)^2$$
  $$\Big(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\Big)^2>\frac{x}{4}$$
  En utilisant l'égalité de début de démonstration :
  $$\frac{e^x}{x}>\frac{x}{4}$$
  On a la limite $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{4}=+\infty$. D'après les théorèmes de comparaisons des limites, on obtient :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$
- Posons le changement de variable suivant : $x=-X$
  - $x{\cdot}e^x=-X{\cdot}e^{-X}=-X{\cdot}\dfrac{1}{e^X}=-\dfrac{X}{e^X}=-\dfrac{1}{\frac{e^X}{X}}$
  - Lorsque x tend vers $-\infty$, on a X tend vers $+\infty$.

  Des deux remarques précédentes, on en déduit l'égalité des deux limites suivantes :
  $$\lim_{x\mapsto-\infty}x{\cdot}e^x=\lim_{X\mapsto+\infty}-\frac{1}{\frac{e^X}{X}}=0$$
  car $\displaystyle\lim_{X\mapsto+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$
- La définition du nombre dérivée en 0 donne :
  $$\exp'(0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\exp(0+h)-\exp(0)}{h}$$
  $$\exp(0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\exp(h)-1}{h}$$
  $$1=\lim_{h\mapsto 0}\frac{e^h-1}{h}$$

Corollaire : *(admis)*

Pour tout entier naturel n non-nul :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}x^n{\cdot}e^x=0$$

2. Changement de variable :

Exemple :

- Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$
  Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$. Aux bornes de son ensemble de définition, on a :
  $$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=0\quad;\quad\lim_{x\mapsto 0^+}f(x)=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=0$$
  La limite en 0^- de la fonction f est une forme indéterminée. On a les transformations algébriques suivantes :
  $$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=e^{\frac{1}{x}}{\cdot}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}{\cdot}e^{\frac{1}{x}}$$
  Effectuons le changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$:
  - Lorsque x tend vers 0^-, la variable X tend vers $-\infty$.
  - $\dfrac{1}{x}{\cdot}e^{\frac{1}{x}}=X{\cdot}e^X$

  Ainsi, on a la limite :
  $$\lim_{x\mapsto 0^-}f(x)=\lim_{x\mapsto 0^-}\frac{1}{x}{\cdot}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{X\mapsto-\infty}X{\cdot}e^X=0$$
- Résoudre l'inéquation : $2{\cdot}\mathrm{e}^{2\cdot x}+6{\cdot}\mathrm{e}^x-8<0$
  On a la transformation algébrique :
  $$2{\cdot}\mathrm{e}^{2\cdot x}+6{\cdot}\mathrm{e}^x-8<0$$
  $$2{\cdot}\big(\mathrm{e}^x\big)^2+6{\cdot}\mathrm{e}^x-8<0$$
  Posons le changement de variable $X=\mathrm{e}^x$:
  $$2{\cdot}X^2+6{\cdot}X-8<0$$
  Le polynôme du second degré du membre de gauche a pour discriminant :
  $$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=6^2-4\times2\times(-8)=36+64=100$$
  On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{100}=10$
  Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racnes suivantes :
  $$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\qquad\Bigg|\qquad X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$$
  $$X_1=\frac{-6-10}{2\times2}\qquad\Bigg|\qquad X_2=\frac{-6+10}{2\times2}$$
  $$X_1=\frac{-16}{4}\qquad\Bigg|\qquad X_2=\frac{4}{4}$$
  $$X_1=-4\qquad\Bigg|\qquad X_2=1$$
  Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau de signes :

X	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$2{\cdot}X^2+6{\cdot}X-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Ainsi, l'équation soit vérifiée, il faut que :
  $$X\in\big]-4\,;1\big[\quad\Longrightarrow\quad\mathrm{e}^x\in\big]-4\,;1\big[\quad\Longrightarrow\quad-4<\mathrm{e}^x<1$$
  Voici la courbe représentative de la fonction exponentielle :

  On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\big]-\infty\,;0\big[$