Proposition :

Pour tout réel x, on a :

- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x) > 0$

Preuve :

On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est donnée par la formule :

$$g(x) = \exp(x)\cdot\exp(-x)$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivable. La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée g' :

$$g'(x) = \exp'(x)\cdot\exp(-x) + \exp(x)\cdot\big[-\exp'(-x)\big]$$

$$= \exp'(x)\cdot\exp(-x) - \exp(x)\cdot\exp'(-x)$$

De la propriété $\exp' = \exp$, on déduit :

$$= \exp(x)\cdot\exp(-x) - \exp(x)\cdot\exp(-x) = 0$$

La fonction g est donc constante. En remarquant que :

$$g(0) = \exp(0)\cdot\exp(-0) = 1\times1 = 1$$

On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = 1$$

On vient de montrer que :

- le produit $\exp(x)\cdot\exp(-x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$: le facteur $\exp(x)$ ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.
- Plus précisemment, la fonction g est constante et égale à 1 :

$$g(x) = 1$$

$$\exp(x)\cdot\exp(-x) = 1$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Proposition :

Pour tous nombres réels x et y, on a :

- $\exp\big(x+y\big) = \exp(x)\times\exp(y)$
- $\exp\big(x-y\big) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- Pour tout entier relatif n : $\exp(n\cdot x) = \big[\exp(x)\big]^n$

Preuve :

- Soit a un réel quelconque. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $f(x) = \exp(x+a)\cdot\exp(-x)$ La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \exp'(x+a)\cdot\exp(-x) + \exp(x+a)\cdot\big[-\exp'(-x)\big]$$

$$= \exp(x+a)\cdot\exp(-x) - \exp(x+a)\cdot\exp(-x) = 0$$

  On en déduit que la fonction f est une fonction constante. De plus, on a :

$$f(0) = \exp(0+a)\cdot\exp(-0) = \exp(a)\cdot1 = \exp(a)$$

  Ainsi, la fonction f vérifie pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x) = \exp(a)$$

$$\exp(x+a)\cdot\exp(-x) = \exp(a)$$

$$\exp(x+a)\cdot\frac{1}{\exp(x)} = \exp(a)$$

$$\exp(x+a)\cdot = \exp(a)\cdot\exp(x)$$

- On a la relation suivante :

$$\exp(x-y) = \exp\big[x+(-y)\big] = \exp(x)\cdot\exp(-y)$$

$$= \exp(x)\cdot\frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

- Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

  $\mathcal{P}_n$: "$\exp(n\cdot x) = \big[\exp(x)\big]^n$"

  Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n :

  - **Initialisation :**

    On a : $\exp(0\cdot x) = \exp(0) = 1$; $\big[\exp(x)\big]^0 = 1$

    La propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

  - **Hérédité :**

    Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothès par récurrence :

    $\exp(n\cdot x) = \big[\exp(x)\big]^n$

    On a :

$$\exp\big[(n+1)\cdot x\big] = \exp\big[(n\cdot x)\cdot x\big] = \exp(n\cdot x)\cdot\exp(x)$$

$$= \big[\exp(x)\big]^n\cdot\exp(x) = \big[\exp(x)\big]^{n+1}$$

    On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est réalisée.

  - **Conclusion :**

    La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient détablir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

CC BY-NC