La fonction logarithme népérien

A. Introduction et définition :

Proposition :

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, il existe un et un unique réel y antécédent du nombre x par la fonction exponentielle.

Preuve :

Soit x un nombre réel tel que $x \in]0\,;+\infty[$:

- La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- On a : $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \exp(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \exp(x) = +\infty$
  Ainsi, le nombre x est compris entre les limites aux bornes de $\mathbb{R}$ par la fonction exp.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel y tel que $x = \exp(y)$.

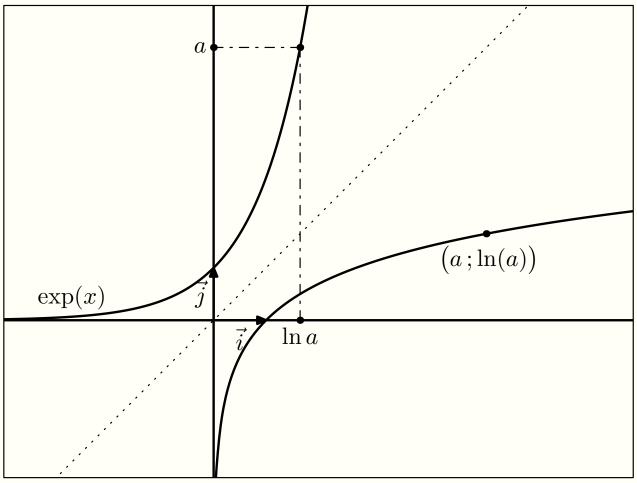
Définition :

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, notons $\ln x$ l'unique antécédent de x par la fonction exponentielle.

Ainsi, le nombre $\ln x$, appelé **logaritmique népérien de** x est l'unitque nombre réalisant : $e^{\ln x} = x$

Remarque :

- Ainsi, de tout nombre de $\mathbb{R}_+^*$, nous avons associer un nombre de $\mathbb{R}$. Cette correspondance s'appelle la fonction logarithme notée ln.
- La proposition peut s'énoncer ainsi :
  $\big(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\big)\big(!\exists y \in \mathbb{R}\big)\big(x = e^y\big)$
- Voici un exemple de construction point à point de la courbe logarithme :



Proposition :

La fonction logarithme vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $e^{\ln(a)} = a$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- Pour tout $b > 0$, $\ln\big(e^b\big) = b$
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$: $e^a = b \Longleftrightarrow a = \ln(b)$

Preuve :

- Le nombre $\ln(a)$ est, par définition, l'antécédent de a par la fonction exponentielle. Ainsi, l'image de $\ln(a)$ par la fonction exponentielle est a. Ce qui s'écrit :
  $e^{\ln(a)} = a$
- On a $e^0 = 1$. Ainsi, l'unique antécédente de 1 par la fonction exponentielle est 0. Par définition du logarithme népérien :
  $\ln(1) = 0$
- De même : $e^1 = e \quad\Longrightarrow\quad \ln(e) = 1$
- Le nombre $\ln\big(e^b\big)$ est l'unique antécédent par la fonction exponentielle du nombre e^b. Mais cet ant{ecédent, c'est b :
  $\ln\big(e^b\big) = b.$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$:
  $e^a = b \iff \ln\big(e^a\big) = \ln\big(b\big) \iff a = \ln\big(b\big)$

B. Propriétés algébriques :

Proposition :

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs :

1. $\ln(x{\cdot}y) = \ln x + \ln y$
2. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
3. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
4. Pour tout entier relatif n, on a : $\ln\big(x^n\big) = n{\cdot}\ln x$
5. $\ln\big(\sqrt{x}\big) = \dfrac{1}{2}{\cdot}\ln x$

Preuve

1. En utilisant la définition de la fonction logarithme, on a les deux égalités suivantes :
   $e^{\ln(x\cdot y)} = x{\cdot}y$; $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = x{\cdot}y$

   On vient de montrer que les deux nombres $\ln(x{\cdot}y)$ et $\ln x + \ln y$ ont la même image par la fonction exponentielle. Or, la fonction expontielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiares, la fonction exponentielle vérifie la relation suivante :
   $e^a = e^b \quad\Longrightarrow\quad a = b$

   On en déduit l'égalité : $\ln(x{\cdot}y) = \ln x + \ln y$
2. En utilisant la relation précédemment démontrée et la relation :
   $$\frac{1}{x} \cdot x = 1$$
   $$\ln\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = \ln 1$$
   $$\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 0$$
   $$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$
3. Utilisons les deux dernières propriétés avec l'égalité :

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right)$$

Utilisons les propriétés précédentes :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$= \ln(x) + \left(-\ln y\right)$$
$$= \ln(x) - \ln y$$

4. Montrons que les nombres $\ln\left(x^n\right)$ et $n\cdot\ln(x)$ ont même image par la fonction exponentielle :
$$e^{\ln\left(x^n\right)} = x^n \quad ; \quad e^{n\cdot\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^n = x^n$$
En utilisant la propriété suivante de la fonction exponentielle :
$$e^a = e^b \quad \Longrightarrow \quad a = b$$
Car ils ont la même image par la fonction exponentielle, on en déduit que les deux nombres $\ln\left(x^n\right)$ et $n\cdot\ln(x)$ sont égaux.

5. Puisque $x\in\mathbb{R}_+^*$, utilisons l'égalité : $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$:
$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x$$
$$\ln\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right) = \ln x$$
$$\ln\left(\sqrt{x}\right)\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln x$$
$$2\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln x$$
$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\ln x$$

C. Propriétés analytiques :

Propriété :

La fonction logarithme népérien sur $\left]0\,;+\infty\right[$:
$$\left(\ln\right)'(x) = \frac{1}{x} \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}_+^*$$

Preuve :

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = e^{\ln x}$.
Or, $f(x)=x$. La formule de dérivation d'une composée donne :

$f(x) = x$	$\left(\ln\right)'(x)\times x = 1$
$f'(x) = 1$	$\left(\ln\right)'(x) = \dfrac{1}{x}$
$\left(\ln\right)'(x)\times e^{\ln x} = 1$	

Corollaire :

On a la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x} = \ln'(1) = 1$

Proposition :

- La fonction logarithme népérien est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+}\ln x = -\infty$

Preuve :

- On a $\left(\ln\right)'(x)=\dfrac{1}{x}$ qui est positif sur $\mathbb{R}_+^*$: la fonction logarithme népérien est croissante.
- Soit M un réel positif. Puisque $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} e^x=+\infty$, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x>a$:
$$x>e^M \quad \Longrightarrow \quad \ln x>\ln e^M \quad \Longrightarrow \quad \ln x>M.$$
Pour tout réel M, il existe un intervalle $\left[a\,;+\infty\right[$ tel que la fonction logarithme soit supérieur à M :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\ln x = +\infty$$
- Posons $x=\dfrac{1}{X}$. On a : $x\mapsto 0^+ \iff X\longmapsto+\infty.$
$$\lim_{x\mapsto 0^+}\ln x = \lim_{x\mapsto+\infty}\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\mapsto+\infty} -\ln X = -\infty$$

Proposition : *(Croissance comparée)*

On a les deux limites : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0} x\cdot\ln x = 0$

Preuve :

- Posons $X=\ln x$. On a : $x\mapsto+\infty \iff X\mapsto+\infty.$
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{e^{\ln x}} = \lim_{X\mapsto+\infty}\frac{X}{e^X} = \lim_{X\mapsto+\infty}\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$$
- Posons $X=\dfrac{1}{x}$. On a : $x\mapsto 0^+ \iff x\mapsto+\infty$
$$\lim_{x\mapsto 0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\mapsto 0^+} -\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\mapsto+\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

Corollaire :

Pour tout entier naturel n non-nul :
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+0} x^n\cdot\ln x = 0$

x	0	$+\infty$
Variation de ln	-∞	$\nearrow$ $+\infty$

D. Dérivées :

Proposition : *(admise)*

Si u est une fonction dérivable et $u>0$ sur un intervalle I alors :
- La fonction $x\longmapsto\ln\left[u(x)\right]$ est définie et dérivable ;
- $\left(\ln\circ u\right)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}'$
k	0	$\mathbb{R}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\exp x$	$\exp x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}'_f$
$\big[u(x)\big]^n$	$n\cdot u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^{n-1}$	I
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}$	$\big\{x\in I \mid u(x)\neq 0\big\}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}}$	$\big\{x\in\mathbb{R} \mid u(x)>0\big\}$
$u(a\cdot x+b)$	$a\cdot u'(a\cdot x+b)$	$\big\{x\in\mathbb{R} \mid a\cdot x+b\in I\big\}$
$\exp\big[u(x)\big]$	$u'(x)\cdot\exp\big[u(x)\big]$	I
$\ln\big[u(x)\big]$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	I
$\cos\big[u(x)\big]$	$-u'(x)\cdot\sin\big[u(x)\big]$	I
$\sin\big[u(x)\big]$	$u'(x)\cdot\cos\big[u(x)\big]$	I

E. Logarithme de base 10:

Définition - Proposition:

Pour tout réel a strictement positif, il existe une et une seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$ réalisant les deux condiions:

$f' = f \quad ; \quad f(0) = a.$

Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle de base** a et on la note $\exp_a$ et l'image d'un nombre x se note: $\exp_a(x)$ ou a^x

Remarque:

La fonction exponentielle de base a a les même propriétés que la fonction exponentielle:

- analytique: strictement positive, strictement croissante, même limite...
- algébrique: $a^{x+y} = a^x\cdot a^y$,...

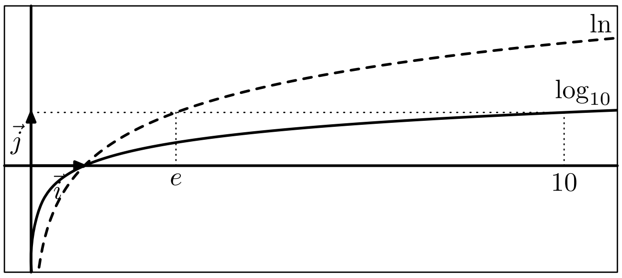
On remarque que $a^x = e^{x\cdot\ln a}$. Cette identité peut être utilisée pour définir l'exponentielle de base a.

Définition:

Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle **fonction logarithme de base** a la fonction réciproque de la fonction exponentielle $\exp_a$ de base a.
On la note $\log_a$.

Remarque:

- La fonction logarithme népérien est la fonction logarithmique de base e.
- Par définition, on a:
  $\log_a\big[\exp_a(x)\big] = a \quad ; \quad \exp_a\big[\log_a(x)\big] = a$
- La fonction logarithme de base a a les mêmes propriétés analytiques et algébriques que la fonction logarithme népérien.
- La fonction logarithme de base a vérifie pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ la relation $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
  Cette identité peut être utilisée pour définir le logarithme de base a.



F. Fonctions exponentielles particulières: