Proposition :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(x) > x$

Preuve :

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \exp(x) - x$$

Cette fonction est dérivable et sa dérivée admet pour expression :

$$f'(x) = \exp(x) - 1$$

Le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\exp(0)=1$, on en déduit que l'inéquation :

$$f'(x) > 0$$

$$\exp(x) - 1 > 0$$

$$\exp(x) > 1$$

admet pour solution l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, la fonction f' admet pour tableau de signe ci-dessous et on en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f'		-	0	+	
Variation de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Le tableau de variation de la fonction f permet d'obtenir la minoration suivante de la fonction f :

$$f(x) > 1$$

$$f(x) > 0$$

$$\exp(x) - x > 0$$

$$\exp(x) > x$$

Proposition :

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \exp(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \mapsto +\infty} \exp(x) = +\infty$$

Preuve :

- D'après le lemme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la comparaison :
  $\exp(x) > x$
  Or, on a la limite $\lim_{x \mapsto +\infty} x = +\infty$. Par les théorèmes de comparaison des limites, on en déduit :
  $$\lim_{x \mapsto +\infty} \exp(x) = +\infty$$
- Utilisons le changement de variable $x = -X$. On a :
  - $\exp(x) = \exp(-X) = \dfrac{1}{\exp(X)}$
  - Lorsque le x va tendre vers $-\infty$, la variable X va tendre vers $+\infty$.

  Des deux remarques précédentes, on en déduit l'égalité des deux limites suivantes :
  $$\lim_{x \mapsto -\infty} \exp(x) = \lim_{X \mapsto +\infty} \frac{1}{\exp(X)}$$
  D'après la limite précédente, on en déduit :
  $$\lim_{x \mapsto -\infty} \exp(x) = 0$$