Primitive, intégrale

A. Définition :

Définition :

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal. On appelle **unité d'aire** *(u.a.)* l'unité de mesure des aires formés par le rectangle ayant pour sommet O, I et J.

Définition :

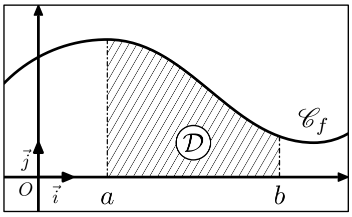
Soit f une fonction positive et définie sur l'intervalle $[a\,;b]$.
On définit le domaine $\mathcal{D}$ du plan délimité par :

- les deux droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$;
- l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$.

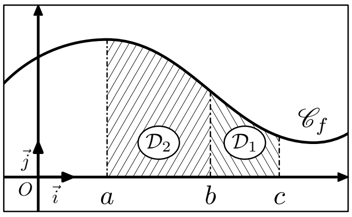
On appelle **intégrale de** f **entre** a **et** b la mesure, exprimée en $u.a.$ de l'aire du domaine $\mathcal{D}$. On note cette aire :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

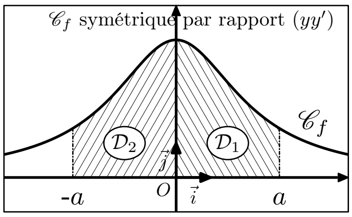
B. Premières propriétés :



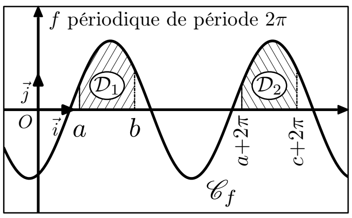
$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$



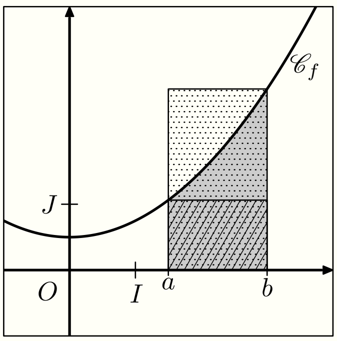
$$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

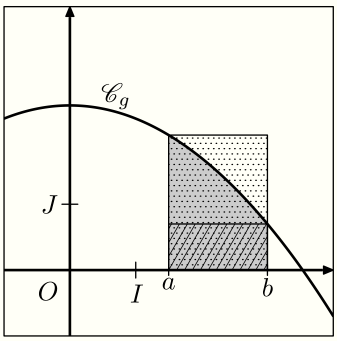


$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque :

Considérons deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[a\,;b]$ et telles que, sur $[a\,;b]$:
f est croissante ; g est décroissante





On a les encadrements :

- $f(a)\cdot(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(b)\cdot(b-a)$
- $g(b)\cdot(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant g(a)\cdot(b-a)$

Preuve :

Pour tout $x\in[a\,;b]$, on a l'encadrement :

$$a \leqslant \quad x \quad \leqslant b$$

Par croissance de la fonction f :

$$f(a) \leqslant \quad f(x) \quad \leqslant f(b)$$

$$\int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(b)\,\mathrm{d}x$$

$$\big[f(a)\cdot x\big]_a^b \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \big[f(b)\cdot x\big]_a^b$$

$$f(a)\cdot b - f(a)\cdot a \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(b)\cdot b - f(x)\cdot a$$

$$f(a)\cdot(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(b)\cdot(b-a)$$

C. Variations de l'aire :

Théorème : *(fondamental)*

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$, la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par :

$$F\colon x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a\,;b]$ et admet pour dérivée la fonction f.

Démonstration :

Dire que la fonction F est dérivable et admet pour dérivée la fonction f signifie que le nombre dérivée de la fonction F en x_0 vaut $f(x_0)$. Nous devons donc établir, pour tout $x_0\in[a\,;b]$, l'égalité :

$$F'(x_0) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

On ne montrera pas le théorème dans sa généralité *(qui sera admis)* mais seulemnet dans le cas particulier où la fonction est également **croissante**.

Pour établir la valeur de la limite recherchée, nous allons étudier séparemment la limite à droite et à gauche.

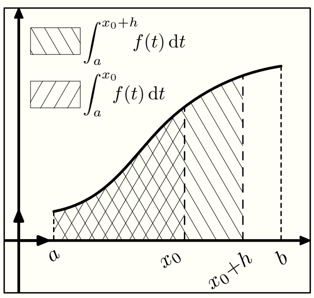
- **Etude du nombre dérivée à droite :**

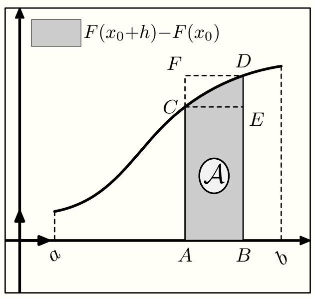
Montrons que : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Pour étudier ce cas, on supppose que $h>0$. Par définition de la fonction F, on a :

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par définition de l'intégrale d'une fonction positive, les deux images, $F(x_0)$ et $F(x_0+h)$, sont représentées par les parties hachurées de la figure de gauche :





Ainsi, l'aire grisée de la figure de droite, notée $\mathcal{A}$, est obtenue par décomposition des surfaces :

$F(x_0)+\mathcal{A}=F(x_0{+}h)$

$\mathcal{A}=F(x_0{+}h)-F(x_0)$

Parmi les points de la figure de droite, on a les coordonnées suivantes :

$C\big(x_0\,;f(x_0)\big)$; $D\big(x_0{+}h\,;f(x_0{+}h)\big)$

On a les aires suivantes des rectangles $ABEC$ et $ABDF$:

$\mathcal{A}_{ABEC}=h{\times}f(x_0)$; $\mathcal{A}_{ABDF}=h{\times}f(x_0{+}h)$

La comparaison des aires permet d'obtenir l'encadrement :

$h{\times}f(x_0)\leqslant \qquad \mathcal{A} \qquad \leqslant h{\times}f(x_0{+}h)$

$h{\times}f(x_0)\leqslant F(x_0{+}h)-F(x_0)\leqslant h{\times}f(x_0{+}h)$

h est un nombre réel positif :

$$f(x_0)\leqslant\frac{F(x_0{+}h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0{+}h)$$

La continuité de la fonction f sur $[a\,;b]$ et en particulier en x_0 permet d'obtenir la limite suivante :

$\lim\limits_{h\mapsto 0^+} f(x_0{+}h)=f(x_0)$

D'après l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes, on obtient la valeur de la limite suivante :

$\lim\limits_{h\mapsto 0^+}\dfrac{F(x_0{+}h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

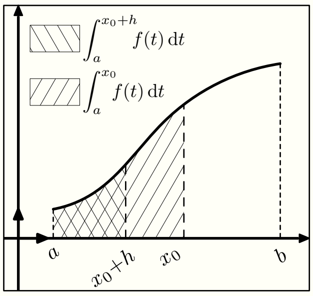
- **Etude du nombre dérivée à gauche :**

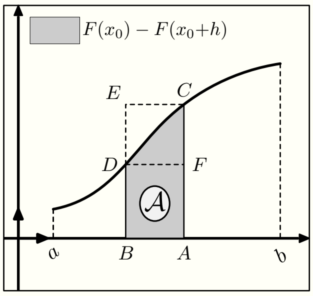
Montrons que $\lim\limits_{h\mapsto 0^-}\dfrac{F(x_0{+}h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

Pour étudier ce cas, on supppose que $h<0$. Par définition de la fonction F, on a :

$$F(x_0)=\int_a^{x_0}f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad F(x_0{+}h)=\int_a^{x_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par définition de l'intégrale d'une fonction positive, les deux images, $F(x_0)$ et $F(x_0{+}h)$, sont représentées par les aires hachurées de la figure de gauche :





Ainsi, l'aire grisée de la figure de droite étant notée $\mathcal{A}$, on obtient par décomposition des surfaces, l'égalité suivante :

$F(x_0{+}h)+\mathcal{A}=F(x_0)$

$\mathcal{A}=F(x_0)-F(x_0{+}h)$

Parmi les points de la figure de droite, on a les coordonnées suivantes :

$C\big(x_0\,;f(x_0)\big)$; $D\big(x_0{+}h\,;f(x_0{+}h)\big)$

On a les aires suivantes des rectangles $ABEC$ et $ABDF$:

$\mathcal{A}_{ABEC}=(-h){\times}f(x_0)$; $\mathcal{A}_{ABDF}=(-h){\times}f(x_0{+}h)$

(Ne pas oublier qu'une aire est positive et que le nombre réel h est négatif).

La comparaison des aires permet d'obtenir l'encadrement :

$(-h){\times}f(x_0{+}h)\leqslant \qquad \mathcal{A} \qquad \leqslant(-h){\times}f(x_0)$

$(-h){\times}f(x_0{+}h)\leqslant F(x_0)-F(x_0{+}h)\leqslant h{\times}f(x_0)$

$-h$ est un nombre réel positif :

$$f(x_0{+}h)\leqslant\frac{F(x_0)-F(x_0{+}h)}{-h}\leqslant f(x_0)$$

$$f(x_0{+}h)\leqslant\frac{F(x_0{+}h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0)$$

La continuité de la fonction f sur $[a\,;b]$ et en particulier en x_0 permet d'obtenir la limite suivante :

$\lim\limits_{h\mapsto 0^-} f(x_0{+}h)=f(x_0)$

D'après l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes, on obtient la valeur de la limite suivante :

$\lim\limits_{h\mapsto 0^-}\dfrac{F(x_0{+}h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

- **Conclusion :**

On vient de montrer l'égalité des deux limites à gauche et à droite :

$\lim\limits_{h\mapsto 0^-}\dfrac{F(x_0{+}h)-F(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0^+}\dfrac{F(x_0{+}h)-F(x_0)}{h}$

Ce qui montre l'existence de la limite $\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{F(x_0{+}h){-}F(x_0)}{h}$ et cette limite a pour valeur :

$\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{F(x_0{+}h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

Par définition du nombre dérivée d'une fonction, on a :

$$F'(x)=f(x_0)$$

D. Primitive:

Définition :

Soit f une fonction définie sur une intervalle $\big[a\,;\,b\big]$. On appelle **primitive de** f toutes fonctions qui admettent pour dérivée la fonction f.

Remarque :

Si une fonction admet une primitive alors elle admet une infinité de primitives

Théorème : *(admis)*

Toute fonction continue admet des primitives

$f(x)$	$F(x)$
a	$a{\cdot}x+k$
x^n où $n\in\mathbb{Z}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}{\cdot}x^{n+1}+k$
Pour $x{>}0$, $\dfrac{1}{x}$	$\ln x+k$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}+k$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2{\cdot}\sqrt{x}+k$
e^x	e^x+k
$\sin x$	$-\cos x+k$
$\cos x$	$\sin x+k$

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^n$	$\dfrac{1}{n+1}\cdot\big[u(x)\big]^{n+1}+k$
$\dfrac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}$ où $u(x)\neq 0$	$-\dfrac{1}{u(x)}+k$
$u'(x)\cdot e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+k$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $\begin{cases}u'(x)>0\\ u(x)>0\end{cases}$	$\ln\big[u(x)\big]+k$
$u'(x)\cdot\sin\big[u(x)\big]$	$-\cos\big[u(x)\big]+k$
$u'(x)\cdot\cos\big[u(x)\big]$	$\sin\big[u(x)\big]+k$

Remarque :

1. Pour $k\in\mathbb{N}$, la primitive de x^n s'obtient par dérivation du monôme $\dfrac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$.
2. Pour $k\in\mathbb{Z}^*\backslash\{-1\}$, pour établir l'expression de la primitive, il faut dériver l'expression rationnelle $\dfrac{1}{(1-n)\cdot x^{n-1}}$.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Notons F une des primitives de f.

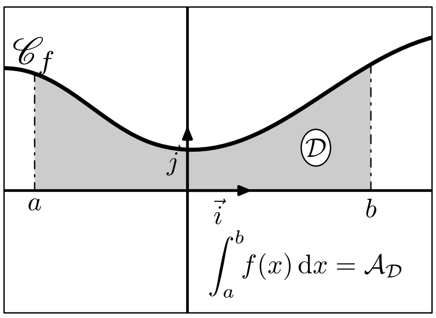
- Pour tout $k\in\mathbb{R}$, la fonction $F+k$ est un primitive de f.
- Soit G une primitive de la fonction f, alors il existe un réel k tel que : $G=F+k$
- Pour réel a et b, il existe une unique primitive G de f telle que :
  $G(a)=b$

E. Mesure d'aires :

Proposition :

Soit f une fonction continue et positive. Notons F une de ses primitives. On a :

$$\mathcal{A}_\mathcal{D}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$



Preuve :

Considérons la fonction G définie :

$G(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

En particulier, on a : $\mathcal{A}_\mathcal{D}=G(b)$

La fonction G est une primitive de f. Ainsi, il existe un réel k tel que :

$G(x)=F(x)+k$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

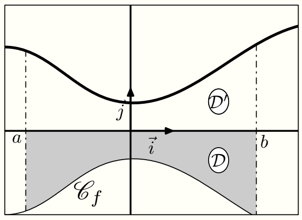
Or, on a :

$F(b)-F(a)=\big[G(b)-k\big]-\big[G(a)-k\big]$

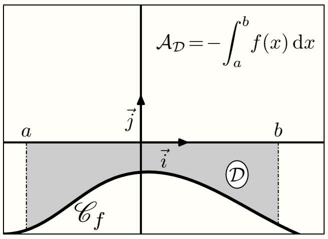
$=G(b)-G(a)=G(b)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

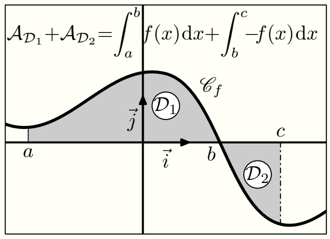
Remarque :

Dans le cas d'une fonction négative sur son ensemble de définition, on utilise la fonction opposée :



Voici deux applications :





Remarque :

Le calcul de l'intégrale d'une fonction positive et continue donne la mesure de sa surface en *unité d'aire (u.a.)*. Attention, de prendre en compte l'échelle d'une représentation le cas échéant.

F. Intégrale d'une fonction continue :

1. Définition :

Définition :

Soit a et b deux réels appartenant à l'intervalle I et f une fonction continue définie l'intervalle I , on définit l'**intégrale de la fonction f de a à b** notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par :

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

où F désigne une primive de la fonction f

Remarque :

- Aucune comparaison n'est donnée sur les bornes a et b. Il est désormais possible de parler de l'intégrale :
  $\displaystyle\int_1^{-1} x^2\,\mathrm{d}x$
- Cette définition ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, choisissons une autre primitive G de la fonction f. On sait qu'il existe un réel k tel que :
  $G(x)=F(x)+k$
  On montre alors que : $G(b)-G(a)=F(b)-F(a)$
- De plus, cette définition englobe la définition donnée dans le cas d'une fonction continue et positive grâce à la propriété du paragraphe **E.**.

2. Relation de Chasles :

Proposition : *(Relation de Chasles)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois nombres réels appartenant à I. On a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

La fonction f est une fonction continue, elle admet donc une primitive qu'on notera F. Par définition de l'intégrale, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \big[F(b)-F(a)\big]+\big[F(c)-F(b)\big]\\ &= F(c)+\big[F(b)-F(b)\big]-F(a) = F(c)-F(a)\\ &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

D'après la relation de Chasles, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = F(a)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = 0$$

On en déduit l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Linéarité :

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un nombre réel quelconque. On a les deux identités suivantes :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x){+}g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda{\cdot}f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda{\cdot}\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$

Ces deux propriétés s'appellent "*propriétés de linéarité de l'intégrale*".

Preuve :

Les fonctions f et g étant continues, elles admettent deux primitives notées respectivement F et G.

- Etablissons l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x){+}g(x)\,\mathrm{d}x$$
  - $$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)_dx + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \big[F(b)-F(a)\big]+\big[G(b)-G(a)\big]\\ &= F(b)+G(b)-F(a)-G(b)\\ &= \big(F{+}G\big)(b)-\big(F{+}G\big)(a)\\ &= \big[F{+}G\big]_a^b\end{aligned}$$
  - La formule de dérivation de l'addition permet d'écrire :
  $$\big(F{+}G\big)'(x) = F'(x)+G'(x)$$
  Par définition des primitives F et G :
  $$= f(x)+g(x)$$
  On en déduit :
  $$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)+G(x)\big]_a^b$$
- Etablissons l'égalité : $\displaystyle\int_a^b \lambda{\cdot}f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda{\cdot}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
  - $$\lambda{\cdot}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda{\cdot}\big[f(x)\big]_a^b = \lambda{\cdot}\big[f(b)-f(a)\big]$$
  $$= \lambda{\cdot}f(b)-\lambda{\cdot}f(a)$$
  - λ étant un coefficient constant, on en déduit la dérivation suivante :
  $$\big(\lambda{\cdot}F\big)' = \lambda{\cdot}F' = \lambda{\cdot}f$$
  On en déduit que la fonction $(\lambda{\cdot}F)$ est la primitive de la fonction $(\lambda{\cdot}f)$.
  $$\int_a^b \lambda{\cdot}f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\lambda{\cdot}f(x)\big]_a^b = \lambda{\cdot}f(b)-\lambda{\cdot}f(a)$$

4. Positivité :

Proposition :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.

- Si f est positive sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- Si f est négative sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$

Démonstration :

La fonction f étant continue, elle admet une primitive qu'on notera F. La démonstration de cette propriété se base sur le sens de variation de la fonction F puisqu'on connait le signe de f qui est sa dérivée :

- Supposons que f est positive, alors la fonction F est croissante. On a la comparaison suivante :
$$b \geqslant a$$
Puisque la fonction F est croissante :
$$F(b) \geqslant F(a)$$
$$F(b)-F(a) \geqslant 0$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
- Supposons que f est négative, alors la fonction F est décroissante. On a la comparaison suivante :

$$b \geqslant a$$

Puisque la fonction F est décroissante :

$$F(b) \leqslant F(a)$$

$$F(b) - F(a) \leqslant 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Corollaire :

Soit f et g deux fonctions continues sur $\big[a\,;b\big]$ tels que :
$f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \big[a\,;b\big]$
Alors, on a la comparaison :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

Puisque que pour tout $x \in \big[a\,;b\big]$, on a la comparaison :

$$f(x) \leqslant g(x)$$

On en déduit les inégalités suivantes :

$$f(x) - g(x) \leqslant 0$$

La fonction $x \longmapsto f(x) - g(x)$ est négative, d'après la proposition précédente, on a :

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Par utilisation de la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Valeur moyenne d'une fonction :

Définition :

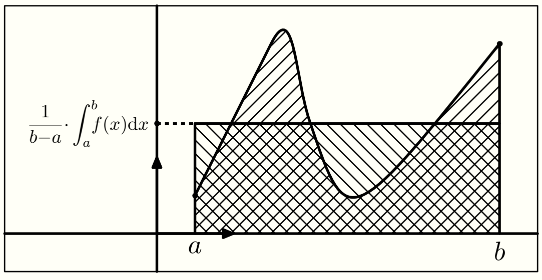
Soit f une continue sur l'intervalle $\big[a\,;b\big]$. on définit la **moyenne de la fonction f sur $\big[a\,;b\big]$** comme le nombre réel définit par :

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque :

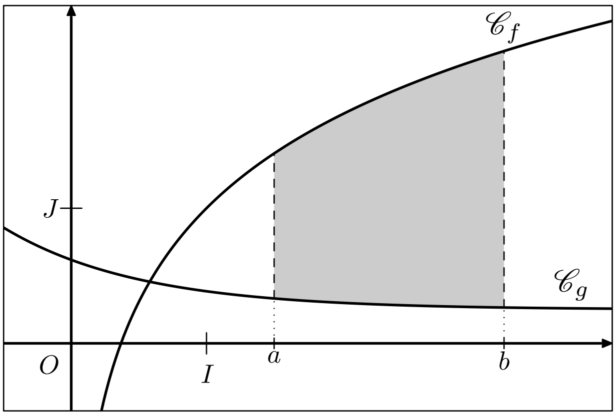
Dans le cas d'une fonction continue et positive, la moyenne d'une fonction réalise la solution au problème suivant :

"*Quelle fonction constante sur $\big[a\,;\big]$ définie la même aire dans le domaine délimité par les droites $x=a$, $x=b$ et l'axe des abscisses que la fonction f ?*"



6. Surface entre 2 courbes :

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $\big[a\,;b\big]$ et telles que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$:



Considérons le domaine $\mathcal{D}$ délimité par :

- les droites d'équations : $x = a$; $x = b$.
- les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ se détermine par :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$