Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q \neq 1$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :

Notons S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n). On a :

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n$$

$$(1-q) \cdot S = (1-q) \cdot \big(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big)$$

$$(1-q) \cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - q \cdot \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big]$$

$$(1-q) \cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - \big[q \cdot v_0 + q \cdot v_1 + q \cdot v_2 + \cdots + q \cdot v_{n-2} + q \cdot v_{n-1} + q \cdot v_n\big]$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n - v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_{n-1} - v_n - v_{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 - v_{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 - v_0 \cdot q^{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 \cdot \big(1 - q^{n+1}\big)$$

$$S = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q \neq 1$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :

Notons S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n). On a :

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n$$

$$(1-q) \cdot S = (1-q) \cdot \big(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big)$$

$$(1-q) \cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - q \cdot \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big]$$

$$(1-q) \cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - \big[q \cdot v_0 + q \cdot v_1 + q \cdot v_2 + \cdots + q \cdot v_{n-2} + q \cdot v_{n-1} + q \cdot v_n\big]$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n - v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_{n-1} - v_n - v_{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 - v_{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 - v_0 \cdot q^{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 \cdot \big(1 - q^{n+1}\big)$$

$$S = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q \neq 1$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :

Notons S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n). On a :

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n$$

$$(1-q) \cdot S = (1-q) \cdot \big(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big)$$

$$(1-q) \cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - q \cdot \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big]$$

$$(1-q) \cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - \big[q \cdot v_0 + q \cdot v_1 + q \cdot v_2 + \cdots + q \cdot v_{n-2} + q \cdot v_{n-1} + q \cdot v_n\big]$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n - v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_{n-1} - v_n - v_{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 - v_{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 - v_0 \cdot q^{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 \cdot \big(1 - q^{n+1}\big)$$

$$S = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q \neq 1$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :

Notons S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n). On a :

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n$$

$$(1-q) \cdot S = (1-q) \cdot \big(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big)$$

$$(1-q) \cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - q \cdot \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big]$$

$$(1-q) \cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - \big[q \cdot v_0 + q \cdot v_1 + q \cdot v_2 + \cdots + q \cdot v_{n-2} + q \cdot v_{n-1} + q \cdot v_n\big]$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n - v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_{n-1} - v_n - v_{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 - v_{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 - v_0 \cdot q^{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = v_0 \cdot \big(1 - q^{n+1}\big)$$

$$S = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Proposition :

Soit $\left(v_n\right)$ une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q{\neq}1$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_0+v_1+\cdots+v_n=v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :

On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathcal{P}_n\ :\quad S_n=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

où : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

- **Initialisation :**
  - $S_0=u_0$
  - $u_0{\cdot}\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q}=u_0{\cdot}\dfrac{1-q}{1-q}=u_0$

  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  On supppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est-à-dire qu'on a la propriété :

  $$S_n=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  On a les transformations suivantes :

  $$S_n=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
  $$u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
  $$u_0+u_1+\cdots+u_n+u_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+1}}{1-q}+u_{n+1}$$

  On en déduit :

  $$S_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+1}+u_{n+1}{\cdot}\left(1-q\right)}{1-q}$$

  Le terme de rang $n{+}1$ admet pour expression :

  $$S_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+1}+u_0{\cdot}q^{n+1}{\cdot}\left(1-q\right)}{1-q}$$
  $$S_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+1}+u_0{\cdot}q^{n+1}-u_0{\cdot}q^{n+1}{\cdot}q}{1-q}$$
  $$S_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+2}}{1-q}$$
  $$S_{n+1}=\frac{u_0\left(1-q^{n+2}\right)}{1-q}$$
  $$S_{n+1}=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

  On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. Le raisonement par récurrence permet d'établir cette propriété pour tout entier naturel n.

Proposition :

Soit $\left(v_n\right)$ une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q{\neq}1$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_0+v_1+\cdots+v_n=v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :

On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathcal{P}_n\ :\quad S_n=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

où : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

- **Initialisation :**
  - $S_0=u_0$
  - $u_0{\cdot}\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q}=u_0{\cdot}\dfrac{1-q}{1-q}=u_0$

  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  On supppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est-à-dire qu'on a la propriété :

  $$S_n=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  On a les transformations suivantes :

  $$S_n=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
  $$u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
  $$u_0+u_1+\cdots+u_n+u_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+1}}{1-q}+u_{n+1}$$

  On en déduit :

  $$S_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+1}+u_{n+1}{\cdot}\left(1-q\right)}{1-q}$$

  Le terme de rang $n{+}1$ admet pour expression :

  $$S_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+1}+u_0{\cdot}q^{n+1}{\cdot}\left(1-q\right)}{1-q}$$
  $$S_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+1}+u_0{\cdot}q^{n+1}-u_0{\cdot}q^{n+1}{\cdot}q}{1-q}$$
  $$S_{n+1}=\frac{u_0-u_0{\cdot}q^{n+2}}{1-q}$$
  $$S_{n+1}=\frac{u_0\left(1-q^{n+2}\right)}{1-q}$$
  $$S_{n+1}=u_0{\cdot}\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

  On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. Le raisonement par récurrence permet d'établir cette propriété pour tout entier naturel n.